QUANTUM FIELD THEORY

場の量子論

第2巻

素粒子の相互作用

F. マンドル／G. ショー 著
樺沢 宇紀 訳

丸善プラネット

Quantum Field Theory

2nd Edition

FRANZ MANDL

and

GRAHAM SHAW

School of Physics & Astronomy,

The University of Manchester, Manchester, UK

PRINTED IN JAPAN

目 次

相対論的な場の量子論は，主に２つの分野への応用において成果を挙げている．本書の前半の部分では，早くから場の量子論が勝利を収めた量子電磁力学 (QED) を扱う．最後の４つの章では弱い相互作用を取り上げて非Abelゲージ群や自発的な対称性の破れ，Higgs機構の概念を導入し，Weinberg-Salamの電弱標準理論に到達する．本書では記述分量の都合により，純粋なレプトン過程だけに話題を限定したが，この理論は強粒子の電弱相互作用も扱えるように拡張され，レプトン過程と同様に成功を収めている．最近 $W^{\pm}$ ボゾンと Z^0 ボゾンが発見されて，その質量が理論の予想と合致していたという事実は，この理論に対して強い支持を与えており，この理論が電弱相互作用に関する基礎理論となり得ることには，十二分に期待が持てる．

本書の入門書としての性格と，分量をあまり多くしたくないという要望から，本書が扱う題材や取扱いの水準は制約を受けている．我々は場の量子論を，非可換な演算子を用いて定式化した．このアプローチは非相対論的な量子力学を習得している読者には馴染み易いものであるし，粒子の生成・消滅演算子を導入することによって，定式化の物理的な意味が最も明確に表現されることになる．本書で取り上げる応用に必要とされる以上の定式的な展開は行わなず，応用例は概ね最低次の摂動計算に限定した．断面積や崩壊頻度，スピンや偏極の和を計算するための技法を詳しく説明し，様々な過程への応用を示したが，それらの応用例の中には，現在行われている電弱相互作用の研究において関心が持たれるものも多い．本書を読み終えた読者は，どのような過程に関しても，最低次の計算については自信を持って行えるようになっているはずである．

本書における繰り込みや輻射補正の取扱いは完全なものではない．我々は正則化と繰り込みの一般的な概念を説明した．QEDに関しては，最低次の輻射補正の計算方法を，次元正則化と，より古い切断の技法の両方によっていくらか詳しく示した．赤外発散と，その輻射補正との関係も，同様に最低次のみの議論を与えた．本書執筆の本来の意図に基づき，QEDにおける高次の補正や，電弱理論における繰り込みなどを本格的に取り上げることはしていない．後者の問題を論じるにはFeynmanが与えた場の量子論の径路積分による定式化が不可欠と思われるが，残念ながら我々はこの話題について簡単な短い解説を用意することはできなかった．

本書は，著者たちが多年にわたり行ってきた講義から生まれたものである．我々は学生たちや同僚たちとの議論から多くの恩恵を受けており，また一部の人々には原稿に目を通してもらった．我々は彼ら全員に対して感謝しているが，とりわけ我々のこの共同作業を後押ししてくれたSandy Donnachieには特別に謝意を表したい．

1984年１月

FRANZ MANDL
GRAHAM SHAW

り，また強い相互作用についても，その作用が比較的弱くなる短距離の問題に応用されている．

現代において最も重要な摂動論の技法は，Feynmanダイヤグラムを用いるものである．ダイヤグラムの技法は，相対論的な場の量子論以外の多くの分野においても著しく有用である．我々は後からFeynmanダイヤグラムの技法を展開し，これを電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用の問題へと応用する予定である．しかし，これを行うためには，その前提としてLorentz（ローレンツ）共変な形式の導入が不可欠である．

この導入の章では，より単純に非共変な形式を採用するが，これで事の足りる応用例も多く，ここから場の量子化に関わるいろいろな概念を導き出すこともできる．ここでは完全な古典論——Maxwell（マックスウェル）理論——が存在する電磁力学の問題を考察する．後から再び正式に量子電磁力学を導くので，本章に限り，すべての手続きを正当化して議論を進めるのではなく，時折もっともらしく見える通念に頼ることにする．

1.2　電荷を含まない空間における電磁場

1.2.1　古典的な電磁場

古典電磁気学の理論は，Maxwellの方程式に集約されている．電荷密度 $\rho(\mathbf{x},t)$ と電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$ が存在する場合，電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ は次の方程式を満たす．

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho \tag{1.1a}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{1.1b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{1.1c}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.1d}$$

本書全体にわたり，Gauss (c.g.s.) 有理化単位を採用する[1)]．

Maxwell方程式の後ろの２本の式（式(1.1c)と式(1.1d)）から，次のようにスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{x},t)$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ を定義できることが分かる．

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.2}$$

ただし，式(1.2)を満たすようなポテンシャルが一意的に決まるわけではない．任意関数 $f(\mathbf{x},t)$ を用いて，これらのポテンシャルに，

[1)] Lorentz-Heaviside有理化単位系とも呼ばれる．この単位系において微細構造定数は $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c) \approx 1/137$ である．有理化していない (unrationalized) 通常の Gauss単位系では $\alpha = e_{\mathrm{unrat}}^2/\hbar c$．よって $e = e_{\mathrm{unrat}}\sqrt{4\pi}$，これに対応して $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathrm{unrat}}/\sqrt{4\pi}$, etc. である．

このポテンシャルに対応する電場と磁場は，式(1.2)により，次のように与えられる．

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{1.9}$$

$\mathbf{A}$ と同様に，これらも横波の場になっている．式(1.8)の解は自由空間における横波電磁場である．これらの波はしばしば輻射場 (radiation field) と呼ばれる．輻射場のエネルギーは次式で与えられる．

$$H_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{2}\int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{1.10}$$

量子化を施すために，場が含む各自由度に対して (非相対論的な量子力学における x と p_x のように) 正準共役な変数の組を導入し，それぞれに交換関係を設定することを試みてみよう．ある時刻 t を決めたとき，ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の値は空間内のすべての点 $\mathbf{x}$ において特定されなければならない．この観点に立つと，電磁場は連続無限個の自由度を備えていることになる．しかし一辺 L，体積 $V = L^3$ の立方体領域を考え，領域の端面に周期境界条件の制約を課せば問題は簡単になる．ベクトルポテンシャル場はFourier(フーリエ)級数で表され，可付番の Fourier 展開係数によって特定できる．つまり有限領域内のベクトルポテンシャル場を，無限個ではあるが可付番の自由度によって記述できることになる．この Fourier 解析は，輻射場が含むそれぞれの基準モード (normal mode) を見出すことに対応する．各モードは調和振動子の運動方程式によって記述され，異なるモードは互いに独立である．(これらの事情はすべて，振動する弦の Fourier 解析と同様のことである．) この措置により，我々は非相対論的な量子力学における調和振動子の量子化の手続きにならって，輻射場を量子化することが可能となる．

周期境界条件，

$$\mathbf{A}(0, y, z, t) = \mathbf{A}(L, y, z, t), \quad \text{etc.} \tag{1.11}$$

の下で，基本関数，

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad r = 1, 2 \tag{1.12}$$

は，横波ベクトル場が形成する関数空間において，完全正規直交系を構成することができる．ベクトル場(1.12)が周期境界条件(1.11)を満たすという制約から，波数ベクトル $\mathbf{k}$ は，

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3), \quad n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \ldots \tag{1.13}$$

この輻射場のエネルギーが時間に依存しないことに注意してもらいたい．これは系が電荷や電流を含まない（これらとエネルギーの授受がない）という仮定から予想されることである．式(1.18)における各振幅を時間に依存する振幅(1.17)によって置き換えてもよいが，a_r と a_r^* の時間依存性は互いに相殺する．

既に予告したように，これから個別の基準振動モードを量子化することによって，輻射場の量子化を行う．量子化された輻射場を光子系として解釈することは，基準モードの調和振動子としての取扱いと密接にかかわっているが，これについては後で述べることにする．

1.2.2　調和振動子

調和振動子のハミルトニアンを，通常の記法で書く．

$$H_{\text{osc}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

q と p は交換関係 $[q, p] = \mathrm{i}\hbar$ を満たす．次のような演算子を導入する．

$$\left.\begin{matrix} a \\ a^\dagger \end{matrix}\right\} = \frac{1}{(2\hbar m\omega)^{1/2}}(m\omega q \pm \mathrm{i}p)$$

これらの演算子は，次の交換関係を持つ．

$$[a, a^\dagger] = 1 \tag{1.19}$$

そして，ハミルトニアンを a と $a^\dagger$ によって書き直すと，次のようになる．

$$H_{\text{osc}} = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(a^\dagger a + a a^\dagger\right) = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \tag{1.20}$$

ハミルトニアンの本質的な部分は，

$$N \equiv a^\dagger a \tag{1.21}$$

という演算子であり，この演算子は正定値性を持つ．すなわち任意の状態 $|\Psi\rangle$ に関して，

$$\langle\Psi|N|\Psi\rangle = \langle\Psi|a^\dagger a|\Psi\rangle = \langle a\Psi|a\Psi\rangle \geq 0$$

となる．よって N は非負の最低固有値，

$$\alpha_0 \geq 0$$

ここまで我々は，ある時刻 $(t=0)$ のことだけを考察してきた．ここで Heisenberg（ハイゼンベルク）描像における運動方程式を論じてみよう[3)]．この描像の下では，演算子が時間に依存する．a について考えるならば，運動方程式は，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}=[a(t),H_{\mathrm{osc}}] \tag{1.27}$$

であり，これを初期条件 $a(0)=a$ を与えて解かなければならない．H_{osc} は時間に依存し，$a(t)$ と $a^\dagger(t)$ (同時刻の昇降演算子) も a と $a^\dagger$ の交換関係(1.19) と同じ交換関係を持つので，Heisenbergの運動方程式(1.27) は，

$$\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{i}\omega a(t)$$

となり，解は次のように与えられる．

$$a(t)=a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{1.28}$$

1.2.3　輻射場の量子化

前項で導いた調和振動子に関する結果を，輻射場にも即座に適用することができる．輻射場のハミルトニアン(1.18) は，独立な調和振動子のハミルトニアン(1.20) の重ね合わせ (集合体) と等価な形をしている．(式(1.18) では，まだ a_r と a_r^* が古典的な振幅なので，これらの順序を入れ換えてもよい．) そこで量子化の手続きとして，式(1.19) と類似の交換関係を設定する．

$$\begin{aligned}&[a_r(\mathbf{k}),a_s^\dagger(\mathbf{k}')]=\delta_{rs}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\\&[a_r(\mathbf{k}),a_s(\mathbf{k}')]=[a_r^\dagger(\mathbf{k}),a_s^\dagger(\mathbf{k}')]=0\end{aligned} \tag{1.29}$$

量子化されたハミルトニアン(1.18) は，次のよう表される．

$$H_{\mathrm{rad}}=\sum_{\mathbf{k}}\sum_{r}\hbar\omega_{\mathbf{k}}\left(a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})+\frac{1}{2}\right) \tag{1.30}$$

新たに，演算子，

$$N_r(\mathbf{k})=a_r^\dagger(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})$$

を導入すると，これは固有値 $n_r(\mathbf{k})=0,1,2,\ldots$ を持ち，固有関数は式(1.25) と同じ形で与えられる．

[3)] Schrödinger描像，Heisenberg描像，相互作用描像については，本章の付録 (1.5節) に簡単な説明を与えてある．

状態と左回りの円偏光状態を表す．光子はスピン1を持つ粒子のように振舞う．スピンの第3成分は，光子場の横波の性質のために現れない．

輻射場の最低エネルギー状態は真空状態 $|0\rangle$ であるが，これはすべての占有数 $n_r(\mathbf{k})$ がゼロの状態を表す．式(1.30)もしくは式(1.33)によれば，この状態はエネルギー $\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_r \hbar\omega_{\mathbf{k}}$ を持つ．これは無限大の“定数”であり，物理的には重要性を持たない．したがって我々はエネルギーを計る基準を，真空 $|0\rangle$ のエネルギーがゼロになるように変更して，定数をすべて省いてもよい．この措置により，ハミルトニアン(1.30)は，次式に置き換わる．

$$H_{\mathrm{rad}} = \sum_{\mathbf{k}}\sum_r \hbar\omega_{\mathbf{k}} a_r^\dagger(\mathbf{k})\, a_r(\mathbf{k}) \tag{1.37}$$

(式(1.35)の余分な定数項も同時に省かれることになるが，運動量に関しては $\mathbf{k}$ の和の対称性により，元々結果的に定数項の寄与が残らない．)

式(1.32)のように，系の状態を各モードの量子(粒子)の占有数 $n_r(\mathbf{k})$ によって指定する表示の方法を“占有数表示”と呼ぶ．この表示は，よく定義された各モードに確定した数の光子が存在するような始状態と終状態を想定した(おそらくは中間状態を介しての)遷移過程の計算をするために，実用的にも多大な重要性を持っている．これらの概念は，もちろん光子系だけに限定されるものではなく，一般の場に量子化を施した量子系に適用できるものである．我々は光子の占有数 $n_r(\mathbf{k})$ がゼロ以上のすべての整数 $0, 1, 2, \ldots$ を取り得ることを既に見た．したがって光子は Bose(ボーズ) - Einstein(アインシュタイン) 統計に従う．つまり光子は“ボゾン”である．Fermi(フェルミ) - Dirac(ディラック) 統計に従う電子やミュー粒子のような“フェルミオン”の系を記述する場合には，占有数が0か1だけに制約されるように，扱い方に修正を施す必要がある．

我々はベクトルポテンシャル(1.15)における古典的な振幅 a_r と a_r^* を演算子に置き換えることによって電磁場に量子化を施したが，それに伴ってベクトルポテンシャル自身も電場や磁場も演算子になる．ベクトルポテンシャル(1.15)は，Heisenberg 描像において(式(1.28)，式(1.17)参照)時間に依存する演算子となり，次のように表される．

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \mathbf{A}^+(\mathbf{x},t) + \mathbf{A}^-(\mathbf{x},t) \tag{1.38a}$$

$$\mathbf{A}^+(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k}}\sum_r \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\, a_r(\mathbf{k})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \tag{1.38b}$$

$$\mathbf{A}^-(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k}}\sum_r \left(\frac{\hbar c^2}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\, a_r^\dagger(\mathbf{k})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} \tag{1.38c}$$

第２の近似として，対象とする荷電粒子系の空間範囲(たとえば原子の径の範囲)において，遷移を起こす電場の空間分布を無視する．これらの条件下では，輻射場の横波ベクトルポテンシャル(1.38)から導かれる電場，

$$\mathbf{E}_{\mathrm{T}}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \tag{1.39}$$

だけを(ここでもCoulombゲージ $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ を採用する)各電荷の位置において計算する代わりに“１点”において計算すればよい[6]．この点を原点 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ に選ぶと，遷移を引き起こす電気双極子相互作用 H_{I} は次のように表される．

$$H_{\mathrm{I}} = -\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{T}}(\mathbf{0},t) \tag{1.40}$$

電気双極子能率 $\mathbf{D}$ は，次のように定義される．

$$\mathbf{D} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i \tag{1.41}$$

相互作用(1.40)による１次摂動から生じる遷移は“電気双極子遷移”と呼ばれている．$\mathbf{E}_{\mathrm{T}}$ は $\mathbf{A}$ (式(1.38))と同様に光子の消滅演算子と生成演算子それぞれについて１次であり，H_{I} も同様である．電気双極子遷移においては，後から見るように，ひとつの光子の吸収，もしくはひとつの光子の放射が起こる．次節において，電気双極子近似が妥当となるのは，遷移に伴って放射もしくは吸収される光の波長 $\lambda = 2\pi/k$ が，荷電粒子系の寸法 R よりもはるかに長い場合($\lambda \gg R$)であることを示す予定である．たとえば原子の光学的遷移において R は 1 Å のオーダーであるのに対し，λ は 4000 - 7500 Å の範囲にある．また原子核からのガンマ線の放射では R は数f ($1\,\mathrm{f} = 10^{-15}$ m)，E MeV のガンマ線の波長は $\lambda/2\pi = [197/(E\,\mathrm{in\,MeV})]$ f で，ガンマ線のエネルギーが非常に高くならない限り，電気双極子近似が成立する．

電気双極子近似の下で選択則によって禁じられる遷移があるとしても，そのような遷移が磁場の相互作用を通じて起こったり，電気双極子近似では無視されているような電場の相互作用の一部によって引き起こされる可能性はある．H_{I} (式(1.40))の代わりに正確な相互作用を用いた１次摂動の下で，厳密に禁じられる遷移があるという状況もあり得るが，そのような場合でも，より高次の摂動の下では遷移が生じたり，何らかの全く異なる機構によって遷移が生じるという可能性もある[7]．

---

[6] 式(1.39)の電場を $\mathbf{E}_{\mathrm{T}}$ と書いたのは，ここでは別に電荷の間にもCoulomb相互作用があって，そこからも $-\nabla\phi$ の寄与が生じるからである(式(1.2)，式(1.4a)，1.4節参照)．

[7] 原子の輻射遷移における選択則については，H. A. Bethe and R. W. Jackiw, *Intermediate Quantum Mechanics*, 2nd edn, Benjamin, New York, 1968, Chapter 11 を参照．

のエネルギー $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ はBohr(ボーア)の振動数条件を満たさなければならない.

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega \equiv \frac{E_A - E_B}{\hbar} \tag{1.46}$$

式(1.45)における δ 関数は，通常の方法で狭い範囲内の光子の終状態のグループについて積分を施し，消すことができる．区間 $(\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathrm{d}\mathbf{k})$ における，同じ偏極状態 ($\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k})$ もしくは $\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})$ の一方) の状態数は，次のように与えられる[9].

$$\frac{V\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \frac{Vk^2\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\Omega}{(2\pi)^3} \tag{1.47}$$

式(1.44)-(1.47)により，単位時間あたりに原子が遷移 $|A\rangle \to |B\rangle$ を起こして，波数ベクトル範囲 $(\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathrm{d}\mathbf{k})$ に偏極 $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})$ の光子を放射する確率が得られる.

$$w_r\mathrm{d}\Omega = \int \frac{Vk^2\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\Omega}{(2\pi)^3}\frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_A - E_B - \hbar\omega_{\mathbf{k}})\left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}\right)[n_r(\mathbf{k})+1]\left|\langle B|\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\mathbf{D}|A\rangle\right|^2 \tag{1.49}$$

$k\ (= \omega_{\mathbf{k}}/c)$ に関する積分を実行し，$\mathbf{D}$ に式(1.43)を代入して，次の結果を得る.

$$w_r\mathrm{d}\Omega = \frac{e^2\omega^3\mathrm{d}\Omega}{8\pi^2\hbar c^3}[n_r(\mathbf{k})+1]\left|\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}_{BA}\right|^2 \tag{1.50}$$

ここで $\mathbf{x}_{BA}$ は，次の行列要素を表す.

$$\mathbf{x}_{BA} \equiv \langle B|\mathbf{x}|A\rangle = \langle B|\sum_i \mathbf{r}_i|A\rangle \tag{1.51}$$

式(1.50)において最も興味深い点は，因子 $[n_r(\mathbf{k})+1]$ が現れたことである．$n_r(\mathbf{k})$ は始状態においてモード $(\mathbf{k}, r)$ を占有していた光子の数なので，式(1.50)において $n_r(\mathbf{k})$ に比例する部分は誘導放射，すなわち原子に入射した輻射に起因する遷移の頻度を表している．これは古典的には電子が振動を強いられることによる放射過程と解釈され，半古典的な輻射の理論からも，この項を導出できる[10]．しかしながら，始状態において輻射が存在しないとしても $(n_r(\mathbf{k}) = 0)$，遷移確率(1.50)はゼロにはなら

---

[9] 有限の規格化体積 V を採用しているので，許容される波数ベクトル $\mathbf{k}$ についての総和を取らなければならない(式(1.13))．V が大きければ(厳密には $V \to \infty$)，和は積分に置き換わる.

$$\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\mathbf{k} \tag{1.48}$$

もちろん規格化体積 V は結果的に，たとえば遷移頻度のような物理的に意味のある量には影響を及ぼさない.

[10] たとえば L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3rd edn, McGraw-Hill, New York, 1968, Chapter 11 や，先ほど挙げた Bethe and Jackiw (p.12脚註) の Chapter 10 を参照.

２番目の選択則 (not $J = 0 \to J = 0$) は，電気双極子近似を離れても，１光子過程において厳密に成立する．これは角運動量がゼロの１光子状態が存在しないという事実に因っている．光子自身のスピン１と単位量の軌道角運動量を相殺させて角運動量ゼロの状態をつくるためには，スピン角運動量が３成分をすべて持たなければならないが，輻射場の横波としての性質のために，スピン成分は２つしかない (式(1.36) 参照).

最後に，電気双極子遷移による光子の吸収に関して成立する同様の式を示しておく．行列要素，

$$\langle B, n_r(\mathbf{k}) - 1 | H_{\mathrm{I}} | A, n_r(\mathbf{k}) \rangle$$

を表す式(1.44) に対応する式は，因子 $[n_r(\mathbf{k})+1]^{1/2}$ の代わりに $[n_r(\mathbf{k})]^{1/2}$ を含む．結果としては，式(1.50) において $[n_r(\mathbf{k})+1]$ を $[n_r(\mathbf{k})]$ で置き換えたものが得られる．$\mathrm{d}\Omega$ は入射する輻射場の立体角であり，行列要素 $\mathbf{x}_{BA}$ は式(1.51) であるが，ここではエネルギーの関係が $E_B > E_A$ となるような状態 $|A\rangle$ から $|B\rangle$ への遷移が起こる．振動数 ω は式(1.46) の代わりに $\hbar\omega = E_B - E_A$ によって決まる．

1.4　電荷を含む空間における電磁場

前節では特別な例として電気双極子遷移を調べたが，本節では移動する電荷の系と電磁場の相互作用を一般的に考察したい．この問題は後から相対論的に共変な形で扱う予定なので，ここでは完全に厳密な導出を与えることはせず，むしろ物理的な解釈面を強調する．各電荷の運動は，前節と同様に非相対論的に記述されるものと考える．まず 1.4.1 項でハミルトニアン (Hamilton(ハミルトン)関数) を用いた古典論の定式化を示す．これに基づき，1.4.2 項において量子化された理論へ容易に移行することができる．1.4.3 項と 1.4.4 項では，量子化された理論を輻射遷移と Thomson(トムソン)散乱へ応用してみる．

1.4.1　古典電磁気学

原子のように運動する電荷から成る粒子系が電磁場の中にある場合，ハミルトニアンは３つの部分から構成されるものと考えられる．物質 (荷電粒子) を表す部分，電磁場を表す部分，および物質と電磁場の相互作用を表す部分である．系が含む各荷電粒子の質量をそれぞれ m_i $(i = 1, \ldots, N)$，電荷を e_i，位置座標を $\mathbf{r}_i$ とすると，通常のハミルトニアンは，

最後の式では，点電荷自身に付随する無限大の自己エネルギーを省いた．H_{C} は既にハミルトニアン H_{m} の式(1.55)に含まれているので，輻射場のエネルギーの電場成分に関しては横波に起因する部分だけを考慮すればよい．

$$H_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{2}\int(\mathbf{E}_{\mathrm{T}}^2 + \mathbf{B}^2)\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{1.58}$$

式(1.55)は電荷間に同時刻のCoulomb相互作用が起こることを許容している．運動する電荷と電磁場の相互作用を考慮するためには，物質のハミルトニアン(1.55a)を，次のように置き換える必要がある．

$$H'_{\mathrm{m}} = \sum_i \frac{1}{2m_i}\left(\mathbf{p}_i - \frac{e_i}{c}\mathbf{A}_i\right)^2 + H_{\mathrm{C}} \tag{1.59}$$

$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$ は時刻 t に電荷 e_i が占める位置 $\mathbf{r}_i$ におけるベクトルポテンシャルを表す．式(1.59)における $\mathbf{p}_i$ は，解析力学に基づく含意としては，位置座標 $\mathbf{r}_i$ と正準共役な運動量を表しており，これは i 番目の粒子の速度 $\mathbf{v}_i = \mathrm{d}\mathbf{r}_i/\mathrm{d}t$ と次のように関係する．

$$\mathbf{p}_i = m_i\mathbf{v}_i + \frac{e_i}{c}\mathbf{A}_i$$

この正準運動量が運動学的運動量 $m_i\mathbf{v}_i$ と一致するのは $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ の場合に限られる．H'_{m} の形が式(1.59)であることを正当化する根拠は，ここから正しい電荷の運動方程式が導かれることにある(問題1.2参照)．

$$m_i\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = e_i\left[\mathbf{E}_i + \frac{\mathbf{v}_i}{c}\times\mathbf{B}_i\right] \tag{1.60}$$

$\mathbf{E}_i$ と $\mathbf{B}_i$ は，i 番目の電荷がその時刻に存在する位置における電場および磁場である[11]．

式(1.59)に含まれる各項の分け方を，次のように変更してみる．

$$H'_{\mathrm{m}} = H_{\mathrm{m}} + H_{\mathrm{I}} \tag{1.61}$$

H_{I} は物質と電磁場の相互作用ハミルトニアンであり，次のように与えられる．

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{I}} &= \sum_i\left\{-\frac{e_i}{2m_ic}(\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i\cdot\mathbf{p}_i) + \frac{e_i^2}{2m_ic^2}\mathbf{A}_i^2\right\} \\ &= \sum_i\left\{-\frac{e_i}{m_ic}\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{p}_i + \frac{e_i^2}{2m_ic^2}\mathbf{A}_i^2\right\} \end{aligned} \tag{1.62}$$

---

[11] ここで用いた古典的なハミルトニアンによる解析力学の定式化については，たとえば H. Goldstone, *Classical Mechanics*, 2nd edn, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1980 の，特に pp.21-23 および p.346 を参照．

1.4.3　原子における輻射遷移

ひとつの光子の放射もしくは吸収を伴う原子の状態間遷移を考察しよう．この問題は 1.3 節では電気双極子近似によって扱ったが，ここでは相互作用として(1.62) を用いる．

始状態と終状態が式(1.42) のように表される光子放射の過程を考える．ベクトルポテンシャルの展開式(1.38) を利用すると，この遷移の行列要素が次のように表される (式(1.62) における $\mathbf{A}$ の 1 次の項による).

$$\langle B, n_r(\mathbf{k})+1|H_\mathrm{I}|A, n_r(\mathbf{k})\rangle$$
$$= -\frac{e}{m}\left(\frac{\hbar}{2V\omega_\mathbf{k}}\right)^{1/2}[n_r(\mathbf{k})+1]^{1/2}\langle B|\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}\mathbf{p}_i|A\rangle \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_\mathbf{k}t} \quad (1.65)$$

この行列要素を用いて，1.3 節と同様に単位時間あたりの遷移確率を計算することができる．式(1.50) と式(1.51) の代わりに次式が得られる．

$$w_r \mathrm{d}\Omega = \frac{e^2\omega\,\mathrm{d}\Omega}{8\pi^2 m^2\hbar c^3}[n_r(\mathbf{k})+1]\left|\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\cdot\langle B|\sum_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}\mathbf{p}_i|A\rangle\right|^2 \quad (1.66)$$

ここでの結果は，式(1.65) と式(1.66) の中の行列要素において指数関数を 1 に近似するならば，すなわち，

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \approx 1 \quad (1.67)$$

と置くならば電気双極子近似に帰着する．この近似は遷移によって放射される光の波長 $\lambda = 2\pi/k$ が，荷電粒子系 (ここでは原子) の寸法 R に比べて充分に長い $\lambda \gg R$ の場合に妥当となる．原子の波動関数 $|A\rangle$ と $|B\rangle$ において $\mathbf{r}_i$ は $r_i \lesssim R$ に制約されており，$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i \lesssim kR \ll 1$ である．この不等関係が一般に原子の光学的遷移において満たされることは 1.3 節において既に言及した．運動方程式 $\mathrm{i}\hbar\dot{\mathbf{r}}_i = [\mathbf{r}_i, H]$ と式(1.46) により，

$$\langle B|\mathbf{p}_i|A\rangle = m\langle B|\dot{\mathbf{r}}_i|A\rangle = -\mathrm{i}m\omega\langle B|\mathbf{r}_i|A\rangle$$

となるので，式(1.67) の近似により，式(1.65) と式(1.66) は，電気双極子近似の式(1.44) と式(1.50) に帰着する．

仮に $|A\rangle$ から $|B\rangle$ への遷移が，電気双極子相互作用において禁じられていても，指数関数を展開した高次の項において，その遷移が起こる可能性がある．

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} = 1 - \mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i + \ldots$$

の１次の項が，２次摂動の下でこのような遷移を起こすことも可能であるが，我々の想定する条件下では，２次過程の寄与を無視してよい[14]．式(1.38)により，演算子 $\mathbf{A}^2(\mathbf{0},t)$ は次のように書かれる．

$$\mathbf{A}^2(\mathbf{0},t) = \sum_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}\sum_{r,s}\frac{\hbar c^2}{2V(\omega_1\omega_2)^{1/2}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}_1)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}_2)\right) \times\left[a_r(\mathbf{k}_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1 t}+a_r^\dagger(\mathbf{k}_1)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_1 t}\right]\left[a_s(\mathbf{k}_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2 t}+a_s^\dagger(\mathbf{k}_2)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_2 t}\right] \tag{1.68}$$

振動数は $\omega_r \equiv c|\mathbf{k}_r|$ $(r=1,2)$ と見なす．この演算子は始状態 $|\mathbf{k},\alpha\rangle$ から終状態 $|\mathbf{k}',\beta\rangle$ への遷移(記法を少々簡略化しているが，曖昧な点はないはずである)を，２通りの方法によって起こすことができる．すなわち２つの $[\cdots]$ のどちらか一方において始状態の光子を消滅させる演算子の項を選び，もう一方において終状態の光子を生成させる演算子の項を選べばよい．相互作用(1.62)による，この遷移の行列要素は，次のように与えられる．

$$\langle\mathbf{k}',\beta|\,\frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2(\mathbf{0},t)\,|\mathbf{k},\alpha\rangle = \frac{e^2\hbar}{2mV(\omega\omega')^{1/2}}\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{k}')\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega'-\omega)t}$$

ここでも $\omega = c|\mathbf{k}|$，$\omega' = c|\mathbf{k}'|$ である．始状態において $|\mathbf{k},\alpha\rangle$ の状態にある光子が，$\mathbf{k}'$ の向きの立体角範囲 $\mathrm{d}\Omega$ に，偏極 $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{k}')$ を持った状態で単位時間あたりに散乱される確率は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned} w_{\alpha\to\beta}(\mathbf{k}')\,\mathrm{d}\Omega &= \frac{2\pi}{\hbar}\int\frac{Vk'^2\mathrm{d}k'\mathrm{d}\Omega}{(2\pi)^3}\delta(\hbar\omega'-\hbar\omega)\left(\frac{e^2\hbar}{2mV}\right)^2\left(\frac{1}{\omega\omega'}\right)\left[\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{k}')\right]^2 \\ &= \frac{c}{V}\left(\frac{e^2}{4\pi mc^2}\right)^2\left[\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{k}')\right]^2\mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

ただしここでは $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|$ の関係がある．この遷移頻度を入射する光子の流束密度 (c/V) で割ると，微分断面積が求まる．

$$\sigma_{\alpha\to\beta}(\mathbf{k}')\,\mathrm{d}\Omega = r_0^2\left[\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{k}')\right]^2\mathrm{d}\Omega \tag{1.69}$$

ここで導入した r_0 は古典電子半径と呼ばれており，次のように定義される．

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi mc^2} = 2.818\,\mathrm{f} \tag{1.70}$$

光子の入射ビームが非偏極であり，散乱光の検出も偏極を区別しない場合の微分断面積は，式(1.69)を終状態の偏極に関して足し合わせ，始状態の偏極に関して平均化

[14] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967, p.51.

と表され，$U_\mathrm{S}(t)$ は次のユニタリー演算子となる．

$$U_\mathrm{S}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)/\hbar} \tag{1.75}$$

この演算子 $U_\mathrm{S}(t)$ を利用して，状態ベクトルと演算子 (O) を S.P. から H.P. に変換することができる．

$$|A\rangle_\mathrm{H} = U_\mathrm{S}^\dagger(t)|A,t\rangle_\mathrm{S} = |A,t_0\rangle_\mathrm{S} \tag{1.76}$$

$$O^\mathrm{H}(t) = U_\mathrm{S}^\dagger(t) O^\mathrm{S} U_\mathrm{S}(t) \tag{1.77}$$

$t = t_0$ において，2つの描像による状態ベクトルと演算子は，それぞれ互いに一致する．式(1.76)-(1.77) から看取されるように，H.P. において状態ベクトルは時間依存性を持たず，代わりに演算子の方が時間依存性を担う．しかし式(1.77) により，ハミルトニアン演算子については，

$$H^\mathrm{H} = H^\mathrm{S} \equiv H \tag{1.78}$$

であって，(保存量に対応する演算子なので) H.P. の下でも時間に依存しない．S.P. から H.P. への変換はユニタリーであり，対応する行列要素はどちらの描像の下で評価しても互いに等しい．

$${}_\mathrm{S}\langle B,t|O^\mathrm{S}|A,t\rangle_\mathrm{S} = {}_\mathrm{H}\langle B|O^\mathrm{H}(t)|A\rangle_\mathrm{H} \tag{1.79}$$

交換関係も保持され，$[O^\mathrm{S}, P^\mathrm{S}] = \mathrm{const}$ であれば，$[O^\mathrm{H}(t), P^\mathrm{H}(t)]$ も同じ定数になる．

式(1.77) の微分を取ると，Heisenberg（ハイゼンベルク）の運動方程式を得る．

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} O^\mathrm{H}(t) = [O^\mathrm{H}(t), H] \tag{1.80}$$

S.P. において時間依存性を持つような演算子 (時間にあらわに依存する外部ポテンシャルなどに対応する) を対象とする場合には，式(1.80) を次のように変更する必要がある．

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} O^\mathrm{H}(t) = \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} O^\mathrm{H}(t) + [O^\mathrm{H}(t), H] \tag{1.81}$$

しかし我々は，このような演算子を扱わないことにする．

I.P. は，ハミルトニアンを2つの部分に分けることが前提になる．

$$H = H_0 + H_\mathrm{I} \tag{1.82}$$

場の量子論では，たとえば H_0 によって2種類の自由場を記述し，H_I によってそれらの場の間の相互作用を記述する．(H_I の下付き添字 I は単に ‘interaction’ すなわ

すなわち I.P. の下で，異なる時刻 t_1 と t_2 における状態ベクトルの関係は，

$$|A,t_1\rangle_{\mathrm{I}} = U(t_1,t_2)|A,t_2\rangle_{\mathrm{I}} \tag{1.93}$$

という形で書かれ，両者を関係づけるユニタリー演算子 $U(t_1,t_2)$ は，

$$U(t_1,t_2) = U(t_1)U^\dagger(t_2) \tag{1.94}$$

と定義される．この演算子は，次の関係を満たす．

$$U^\dagger(t_1,t_2) = U(t_2,t_1) \tag{1.95a}$$

$$U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3) \tag{1.95b}$$

練習問題

1.1 電荷を含まない立方体領域の内部における輻射場の状態が，次のように与えられている．

$$|c\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

$c = |c|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$ は任意の複素数を表し，$|n\rangle$ は波数 $\mathbf{k}$，偏極 $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})$ のモードに n 個の光子がある状態(1.31) を表す．他のモードの光子はないものとする．状態 $|c\rangle$ について，以下の性質を導け．

(i) $|c\rangle$ は規格化されている：$\langle c|c\rangle = 1$.

(ii) $|c\rangle$ は消滅演算子 $a_r(\mathbf{k})$ の固有関数であり，その固有値は c である．

$$a_r(\mathbf{k})|c\rangle = c|c\rangle$$

(iii) 領域内における光子の平均数 $\bar{N}$ は，

$$\bar{N} = \langle c|N|c\rangle = |c|^2 \tag{A}$$

となる．N は全光子数演算子である．

(iv) 状態 $|c\rangle$ において，領域内の光子数のゆらぎの自乗平均平方根を ΔN とすると，これは次のように与えられる．

$$(\Delta N)^2 = \langle c|N^2|c\rangle - \bar{N}^2 = |c|^2 \tag{B}$$

(v) 状態 $|c\rangle$ における電場 $\mathbf{E}$ の期待値は，次のように与えられる．

$$\langle c|\mathbf{E}|c\rangle = -\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})2\left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}\right)^{1/2}|c|\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t + \delta) \tag{C}$$

V は立方体領域の体積である．

計量テンソル (metric tensor) $g_{\mu\nu}$ を，次のように定義する．

$$\begin{aligned} &g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = +1 \\ &g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{if } \mu \neq \nu \end{aligned} \tag{2.1}$$

計量テンソルを用いて，反変ベクトル (contravariant vector) x^μ に対して，これに対応する共変ベクトル (covariant vector) x_μ を定義する．

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu \tag{2.2}$$

後ろの式は，繰り返されて用いられている添字に関して自動的に和の計算を施すという規約に従った表記であり，ここではひとつの共変添字 ($_\nu$) とひとつの反変添字 ($^\nu$) を一緒に変更して総和を計算することが含意されている．式(2.1)と式(2.2)により，$x_\mu = (ct, -\mathbf{x})$ である．

反変計量テンソル $g^{\lambda\mu}$ を，次式によって定義する．

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = g^\lambda_\nu = \delta^\lambda_\nu \tag{2.3}$$

δ^λ_ν は Kronecker のデルタを表し，$\delta^\lambda_\nu = 1$ $(\lambda = \nu)$，$\delta^\lambda_\nu = 0$ $(\lambda \neq \nu)$ である．式(2.1)と式(2.3)により，$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ となる．

Lorentz 変換，

$$x^\mu \ \rightarrow \ x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.4}$$

を考えると，

$$x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2 \tag{2.5}$$

は不変量となる．すなわち $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$ はスカラー量である．したがって，

$$\Lambda^{\lambda\mu} \Lambda_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{2.6}$$

となる (付言すると，時空座標の実数性を保証するために $\Lambda^{\lambda\mu}$ も実数に制約される)．

ある4成分量 s^μ (s_μ) が，Lorentz 変換の下で x^μ (x_μ) と同じように変換し，その結果 $s^\mu s_\mu$ が不変となっているならば，その量は反変 (共変) 4元ベクトルと見なされる．4元座標以外の4元ベクトルの例として，エネルギー-運動量ベクトル $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ がある．誤解が生じない場合には，ベクトルやテンソルが添字を省いて表記されることもしばしばある．たとえば x^μ や x_μ の代わりに単に x と書く場合もある．

4次元時空間内の任意の連続領域 Ω における作用積分 $S(\Omega)$ を，次のように定義する．

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x\, \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \tag{2.11}$$

d^4x は4次元時空における体積要素 $\mathrm{d}x^0\mathrm{d}^3\mathbf{x}$ を意味する．

次に，運動方程式，すなわち場の従う方程式が，以下に示す変分原理から得られることを仮定する．この変分原理は，力学における Hamiltonの原理に対応している．任意の領域 Ω において，仮想的な場の変分を考える．

$$\phi_r(x) \;\to\; \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) \tag{2.12}$$

変分は，領域 Ω の境界表面 $\Gamma(\Omega)$ においてゼロになるものと仮定しておく．

$$\delta\phi_r(x) = 0 \;\text{ on } \Gamma(\Omega) \tag{2.13}$$

場 ϕ_r として実数場を想定しても，複素数場を想定してもよい．ただし $\phi(x)$ が複素数場の場合，たとえば $\phi(x)$ と $\phi^*(x)$ を2つの互いに独立な場として扱うか，あるいは $\phi(x)$ を2つの実数場に分解して，それらを独立な場として扱う必要がある．ここで任意の領域 Ω における任意の場の変分 (式(2.12)-(2.13)) の下で，作用積分(2.11) が停留しなければならないという要請，すなわち，

$$\delta S(\Omega) = 0 \tag{2.14}$$

という制約を置くことにする．

式(2.11) から $\delta S(\Omega)$ を計算すると，次のようになる[2)]．

$$\begin{aligned}\delta S(\Omega) &= \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}}\delta\phi_{r,\alpha} \right\} \\ &= \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \right) \right\}\delta\phi_r + \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}}\delta\phi_r \right)\end{aligned} \tag{2.15}$$

2行目の導出には，

$$\delta\phi_{r,\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta\phi_r$$

であることに基づき，部分積分を利用した．式(2.15) の最後の項は，4次元における Gaussの発散定理によって，領域境界 $\Gamma(\Omega)$ の表面積分に変換することができる．Γ

2) 式(2.15) 以降，積の中で重複して用いられている添字 r，α について和を取ることが含意されている．

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_i p_{ri}\dot{q}_{ri} - L \\
&= \sum_i \delta\mathbf{x}_i\left\{\pi_r(i,t)\dot{\phi}_r(i,t) - \mathcal{L}_i\right\}
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

ここで $\delta\mathbf{x}_i \to 0$ の極限，すなわち胞(セル)の大きさを縮めて格子間隔をゼロに近づけた極限を想定し，$\phi_r(x)$ に対する共役量(共役な場)を，次のように定義する．

$$
\pi_r(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_r} \tag{2.22}
$$

$\delta\mathbf{x}_i \to 0$ とすると $\pi_r(i,t)$ は $\pi_r(\mathbf{x}_i,t)$ に近づき，離散系のラグランジアン(2.18)と離散系のハミルトニアンは(2.21)は，以下のような形へと移行する．

$$
L(t) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \tag{2.23}
$$

$$
H = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathcal{H}(x) \tag{2.24}
$$

ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}(x)$ の定義は，

$$
\mathcal{H}(x) = \pi_r(x)\dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\alpha}) \tag{2.25}
$$

であり，式(2.23)と式(2.24)の積分は，ある時刻 t における全空間にわたる積分である．我々が扱うラグランジアン密度は，時間にあらわには依存しないものと仮定してあるので，ハミルトニアン H はもちろん時間に依存しない定数になる．2.4節ではエネルギー保存則を証明する予定であるが，そこでハミルトニアンの式(2.24)-(2.25)を再び導出することになる．

例として，単一の実数場 $\phi(x)$ に関する次のラグランジアン密度を考えよう．

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\phi_{,\alpha}\phi_{,}{}^{\alpha} - \mu^2\phi^2\right) \tag{2.26}
$$

μ は定数で，(長さ)$^{-1}$ の次元を持つ．次章において，この場の量子が換算Compton波長 μ^{-1} すなわち質量 $(\hbar\mu/c)$ で，スピンがゼロの中性ボゾンとなることを見る予定である．$\phi(x)$ に関する運動方程式(2.16)は，Klein-Gordon(クライン ゴルドン)方程式，

$$
\left(\Box + \mu^2\right)\phi(x) = 0 \tag{2.27}
$$

となる．$\phi(x)$ と共役な場(2.22)は，この例では，

$$
\pi(x) = \frac{1}{c^2}\dot{\phi}(x) \tag{2.28}
$$

であり，ハミルトニアン密度(2.25)は次のようになる．

$$
\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}\left[c^2\pi^2(x) + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \mu^2\phi^2\right] \tag{2.29}
$$

一般に運動における保存量は，変換群の下で系が持つ不変性から生じている．たとえば系が連続並進対称性を持つならば，そこから運動量保存則が導かれ，また系が回転対称性を持つならば，そこから角運動量保存則が導かれる．系に対するこのような対称変換は，系に対して互いに等価な別の記述を可能とする．たとえばLorentz変換によって関係づけられる2組の座標系それぞれを用いた系の記述は，互いに等価な内容を含んでいる．量子力学的には，等価な2通りの記述がユニタリー変換 U によって関係づけられ，対称変換の下で状態ベクトルと演算子は，一般に次のように変換する．

$$|\Psi\rangle \;\rightarrow\; |\Psi'\rangle = U|\Psi\rangle, \qquad O \;\rightarrow\; O' = UOU^{\dagger} \tag{2.33}$$

変換のユニタリー性によって，2つのことが保証される．第1に，演算子が従う式は共変である．すなわち元の演算子を用いても，変換後の演算子を用いても，式は同じ形になる．特に場の交換関係と運動方程式が共変となることは重要である．たとえばMaxwellの方程式は，Lorentz変換の下で共変である．第2に，ユニタリー変換の前後で，各振幅は不変であり，したがって観測可能量の予測にも変更は生じない．

連続的な変換を扱う場合には，ユニタリー演算子 U が次のように書かれる．

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha T} \tag{2.34}$$

ここで $T = T^{\dagger}$ (T はエルミート演算子) であり，連続変換のパラメーター α は実数の連続変数である．$\alpha = 0$ のときには U は単位演算子になる．無限小変換を表す演算子は，

$$U \approx 1 + \mathrm{i}\delta\alpha T$$

と与えられ，式(2.33) の第2式は，

$$O' = O + \delta O = (1 + \mathrm{i}\delta\alpha T)O(1 - \mathrm{i}\delta\alpha T)$$

となる．すなわち次式を得ることになる．

$$\delta O = \mathrm{i}\delta\alpha[T, O] \tag{2.35}$$

理論がこの変換の下で不変であれば，ハミルトニアン H は不変で $\delta H = 0$ である．式(2.35) において $O = H$ と置くと，$[T, H] = 0$ が得られる．すなわちこの場合，T は運動の保存量に対応する演算子になると結論される．

ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ から導かれる場の理論に関しては，$\mathcal{L}$ の変換の下での不変性 (対称性) から運動の保存量を構築することができる．そのような理論において，一般的な $\mathcal{L}$ の不変性から，次の形の式 (連続の方程式) が得られる (具体例は後述)．

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0 \tag{2.36}$$

すなわち $\delta\mathcal{L}=0$ であるとするならば，最後の式は，4元ベクトル場を，

$$f^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}}\delta\phi_r$$

と置いた連続の方程式(2.36)にあたる．式(2.38)と式(2.22)から得られる運動の保存量は，次のようになる．

$$F^0 = c\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\pi_r(x)\delta\phi_r(x) \tag{2.40}$$

上式のような保存量の重要な例は，複素場 ϕ_r を扱う際に現れる．すなわち量子論において ϕ_r はエルミート演算子ではなく，すでに言及したように，ϕ_r と $\phi_r^\dagger$ が互いに独立に扱われる．$\mathcal{L}$ が次の変換の下で不変であると仮定しよう．

$$\left.\begin{array}{lll}\phi_r & \to & \phi'_r = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon}\phi_r \approx (1+\mathrm{i}\varepsilon)\phi_r \\ \phi_r^\dagger & \to & \phi_r^{\dagger\prime} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon}\phi_r^\dagger \approx (1-\mathrm{i}\varepsilon)\phi_r^\dagger\end{array}\right\} \tag{2.41}$$

ε は実数のパラメーターであり，それぞれの変換後の近似式は，ε が極めて小さい場合に成立する．式(2.41)により，

$$\delta\phi_r = \mathrm{i}\varepsilon\phi_r, \quad \delta\phi_r^\dagger = -\mathrm{i}\varepsilon\phi_r^\dagger$$

であり，式(2.40)は次のようになる．

$$F^0 = \mathrm{i}\varepsilon c\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\left[\pi_r(x)\phi_r(x) - \pi_r^\dagger(x)\phi_r^\dagger(x)\right]$$

F^0 に任意の定数を掛けた量も保存量となるはずなので，F^0 の代わりに，

$$Q = -\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\left[\pi_r(x)\phi_r(x) - \pi_r^\dagger(x)\phi_r^\dagger(x)\right] \tag{2.42}$$

を考える．q は定数であるが，この複素場 ϕ_r によって表される粒子の持つ電荷が $\pm q$ となることが後から明らかになる．

交換子 $[Q,\phi_r(x)]$ を評価しよう．ϕ_r と $\phi_r^\dagger$ が独立な場なので，ϕ_r は π_r 以外のすべての場と可換である(式(2.31)参照)．同時刻 $(x')^0 = x^0 = ct$ の交換関係として，

$$[Q,\phi_r(x)] = -\frac{\mathrm{i}q}{\hbar}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}'[\pi_s(x'),\phi_r(x)]\phi_s(x')$$

であるが，式(2.31)を用いると，次の結果が得られる．

$$[Q,\phi_r(x)] = -q\phi_r(x) \tag{2.43}$$

無限小変換は，次式で表される．

$$x_\alpha \;\to\; x'_\alpha \equiv x_\alpha + \delta x_\alpha = x_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta} x^\beta + \delta_\alpha \tag{2.46}$$

δ_αは時空内の無限小変位である．$\varepsilon_{\alpha\beta}$としては反対称テンソル $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ を選ぶ必要があるが，これによって斉次Lorentz変換($\delta_\alpha = 0$ の変換)の下で $x_\alpha x^\alpha$ の不変性が保証される．

式(2.46)の下で生じる場の変換が，次のように表されるものと仮定する．

$$\phi_r(x) \;\to\; \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta} S_{rs}^{\alpha\beta} \phi_s(x) \tag{2.47}$$

本節ではLorentz添字 α, β などと同様に，場の成分に付ける添字 r, s などについても，積を構成する因子において重複して用いられている添字については，それらを一緒に変更して和を取るという計算が含意されるものと見なす．x と x'は，異なる2つの座標系から見た時空内の“同じ点”を表しており，ここでの ϕ_r と ϕ'_r は2つの座標系から見た，その“同じ点”における場の成分である．式(2.47)の第2項に現れる場の成分変換性を表す係数 $S_{rs}^{\alpha\beta}$ は，$\varepsilon_{\alpha\beta}$ と同様に α と β に関して反対称であり，対象とする場が持つ変換性から決定される．たとえばベクトルポテンシャルの成分 $A_\alpha(x)$ の場合には，式(2.47)はベクトルの変換則になる．

座標変換(2.46)-(2.47)に関する系の不変性とは，ラグランジアン密度の式が，変換前の座標と場によって表しても，変換後の座標と場によって表しても，同じ形を持つという意味である．

$$\mathcal{L}\big(\phi_r(x), \phi_{r,\alpha}(x)\big) = \mathcal{L}\big(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\alpha}(x')\big) \tag{2.48}$$

$(\phi'_{r,\alpha}(x') \equiv \partial\phi'_r(x')/\partial x'^\alpha)$ 式(2.48)が成立していれば，場の方程式の共変性などもそこから導かれる．つまりラグランジアン密度から導かれるあらゆる式は，変換前の座標と場によって書いても，変換後の座標と場によって書いても，同じ形になるはずである．

ここで証明したい保存則に対応する連続の方程式は，式(2.48)の右辺を，式(2.46)-(2.47)を通じて変換前の座標と場によって表すことによって導かれる．結果を先に示してその含意を指摘し，導出は後から(本節の末尾で)行うことにする．

並進変換(すなわち $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$)に関して，4本の連続の方程式が得られる．

$$\frac{\partial \mathcal{T}^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0 \qquad (\beta = 0, 1, 2, 3) \tag{2.49}$$

ここで，

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\alpha}} \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\beta} - \mathcal{L} g^{\alpha\beta} \tag{2.50}$$

と定義される．これとは別に，ここで必要となる変分は，

$$\delta_{\mathrm{T}}\phi_r(x) \equiv \phi'_r(x') - \phi_r(x) \tag{2.55b}$$

と定義される．これは場の成分の変換性と，参照座標点の変更の両方の影響を合わせた場の変更を表す．これらの変分に関して，次の関係が得られる．

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{T}}\phi_r(x) &= \left[\phi'_r(x') - \phi_r(x')\right] + \left[\phi_r(x') - \phi_r(x)\right] \\ &= \delta\phi_r(x') + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta\end{aligned} \tag{2.56}$$

δx_β は式(2.64)に与えられている．微小量の1次までしか考えないならば，これを次のように書き直してもよい．

$$\delta_{\mathrm{T}}\phi_r(x) = \delta\phi_r(x) + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta \tag{2.57}$$

同様に考えて，式(2.48)を書き直す．

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{L}\big(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\alpha}(x')\big) - \mathcal{L}\big(\phi_r(x), \phi_{r,\alpha}(x)\big) \\ &= \delta\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha\end{aligned} \tag{2.58}$$

$\delta\mathcal{L}$ は，$\phi_r(x)$ が場の方程式(2.16)を満たすことにより，次のようになる．

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_{r,\alpha} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta\phi_r\right\} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\left[\delta_{\mathrm{T}}\phi_r - \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\beta}\delta x_\beta\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.59}$$

式(2.58)と式(2.59)を組み合わせると，連続の方程式が得られる．

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{2.60}$$

$$f^\alpha \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\alpha}}\delta_{\mathrm{T}}\phi_r - \mathcal{T}^{\alpha\beta}\delta x_\beta \tag{2.61}$$

$\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ は式(2.50)に与えてある．

まず，並進操作すなわち $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ の場合を考えると，式(2.46)と式(2.47)より $\delta x_\beta = \delta_\beta$，$\delta_{\mathrm{T}}\phi_r = 0$ となる．式(2.61)は $f^\alpha = -\mathcal{T}^{\alpha\beta}\delta_\beta$ になり，4つの変位 δ_β は互いに独立なので，式(2.60)は4本の連続の方程式(2.49)に帰着し，そこからエネルギーと運動量の保存則が得られる．

第 11 章　ゲージ理論

前章まで我々は量子電磁力学を集中的に扱ってきた．量子電磁力学は相互作用の形が，古典的な Maxwell と Lorentz の理論によって元々よく知られている．しかし素粒子間に働く，電磁力と同等に基本的な“強い相互作用”や“弱い相互作用”については，量子場理論の構築の手引きとなるような古典論が存在しない．前進するための唯一の方法は，相互作用の記述に適すると考えられる形を仮定して，それに基づく予言を実験によって検証することである．幸い相互作用の形には，理論上および実験上の一般的要請に基づく厳しい制約がある．理論的には Lorentz 不変性，局所性，および繰り込み可能性が要請される．局所性という術語は，相互作用ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)$ が同じ時空点 x^μ において評価される場だけの積を含むことにして，遠隔作用の問題を避けることを意味する．繰り込み可能性とは，QED に関して 9.9 節で論じたように，有限個の自由パラメーター(質量や結合定数など)による物理的な予言を，切断を除いた後でもよく定義された有限値に留めることができるという意味である．これらに加えて，仮定される相互作用は，既に実験から知られている素粒子のスペクトルや対称性や保存則と整合していなければならない．

上述の原理に適合し，かつ強い相互作用や弱い相互作用を記述する適切なラグランジアンを見出す必要がある．歴史的には，この目標は繰り込み可能性とゲージ不変性の役割を重視するアプローチによって達成された．これから見るように，これらの要請によって QED の相互作用の形は完全に決定される．このことを踏まえて 1954 年に Yang (ヤン) and Mills (ミルズ) は，電磁的なゲージ変換(4.69)を一般化して，他にも可能な“ゲージ理論”を構築することを提案した．当初はこの理論から実験的には見出されない質量ゼロのボゾンが予言されたので，このアプローチが有望とは思われなかった．しかし最終的にこの問題は解決され，現代の理論において強い相互作用も，弱い相互作用も，電磁相互作用も，すべてゲージ理論の実例となった．

本章では，電磁相互作用と強い相互作用の形を決める上での繰り込み可能性とゲージ不変性の役割について集中的に論じる．本書の次章以降の部分は 2 つの部分から成り，それぞれ互いに独立に読むことができる．

強い相互作用に関する現代の理論は，本章でも後から簡単に見る通り，至極単純な

相互作用ラグランジアンによって表される．しかし，いくつかの簡単な一般的特徴以外に，この理論の物理的な性質を具体的に調べることは困難である．それは摂動論を構築することが技術的に難しく，通常は最低次の摂動の結果がそもそも有効な近似にならないという事情による．第12-15章において，このような問題を扱うために必要となる形式を導入し，強い相互作用の重要な性質を調べることにする．

第16-19章は電磁相互作用と弱い相互作用の統一理論の紹介に充てる．強い相互作用とは対照的に，これは極めて複雑な相互作用ハミルトニアン密度によって記述される．しかし相互作用が明らかになってしまえば，理論の物理的な性質は，すでにQEDに対して導入した摂動論を用いて容易に調べることができる．

11.1　最も単純なゲージ理論：QED

4.5節において，我々は自由フェルミオンのラグランジアン密度，

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi(x) \tag{11.1}$$

に対して，極小（ミニマル）置換，

$$\partial_\mu \;\to\; D_\mu = \left[\partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu(x)\right] \tag{4.64b}$$

を通じて電磁相互作用を導入した．q は，場 $\psi(x)$ によって消滅する粒子の電荷である．我々はこの理論に対してゲージ不変性の要請を課した．すなわち，ラグランジアン密度，

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi(x) = \mathcal{L}_0 - q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$$

が，電磁場のゲージ変換，

$$A_\mu(x) \;\to\; A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \tag{11.2a}$$

の下で不変となることを要請した．$f(x)$ は微分可能な実数関数である．この不変性の要請は，式(11.2a)の変換と同時に Dirac場 $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ が次の変換に従うならば満たされる．

$$\left.\begin{aligned}\psi(x) \;&\to\; \psi'(x) = \psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}\\ \bar{\psi}(x) \;&\to\; \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}qf(x)}\end{aligned}\right\} \tag{11.2b}$$

式(1.12b)は“局所的な”位相変換の形をしている．我々は式(11.2a)と式(11.2b)を“一括した”変換を，ゲージ変換と称することにする．また，このように一括した任

意の変換の下で不変な理論をゲージ理論と呼ぶ．QEDは最も単純なゲージ理論の例である．

上述の議論では，電磁相互作用の形を出発点とした．つまり電磁ポテンシャルのゲージ変換(11.2a)の下で理論に不変性を要請することにより，Dirac場 ψ と $\bar{\psi}$ には同時に局所的位相変換(11.2b)が施されることになった．この議論を逆転させて，自由ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0$ の“大域的な”(global) 位相変換から話を始めてみよう．

$$\left.\begin{array}{lcl}\psi(x) & \to & \psi'(x)=\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \\ \bar{\psi}(x) & \to & \bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\end{array}\right\} \tag{11.3}$$

α は実数である．式(2.40)の議論，および式(4.27)から式(4.29)までの議論から，この不変性によって“カレントの保存”が保証される．すなわちカレントベクトル場，

$$s^\mu(x)=q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{11.4}$$

が，$\partial_\mu s^\mu(x)=0$ を満足し，電荷，

$$Q=q\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\psi^\dagger(x)\psi(x) \tag{11.5}$$

が保存される．

大域的位相変換(11.3)に関する不変性の下では，場の位相を全時空点それぞれにおいて共通の位相角だけ変更することが可能である．このことは必ずしも局所的な場の理論に対する制約になるように見えない．そこで，より一般的な局所的位相変換(11.2b)に関する不変性を理論に要請してみよう．この変換の下で，自由場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0$ は次のように変換する．

$$\mathcal{L}_0 \ \to\ \mathcal{L}_0'=\mathcal{L}_0+q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial_\mu f(x) \tag{11.6}$$

すなわち $\mathcal{L}_0$ は不変ではない．しかし $\mathcal{L}_0$ に付加項 $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ を加えて，新しいラグランジアン密度 $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_\mathrm{I}$ を不変にすることができれば，理論としての不変性は回復する．この目標は“物質場”$\psi(x)$ に対して，これに関係する“ゲージ場”$A_\mu(x)$ を導入し，そのゲージ場に式(11.2a)の変換性を付与することによって達成される．このとき不変性を実現するために，物質とゲージ場の相互作用は，自由場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0$ に対して極小置換(ミニマル)(4.64b)を施すことによって得ればよい．すなわち通常の微分 $\partial_\mu\psi(x)$ を“共変微分”(covariant derivative)，

$$D_\mu\psi(x)=\left[\partial_\mu+\mathrm{i}qA_\mu(x)\right]\psi(x) \tag{11.7}$$

に置き換えることによって，新たなラグランジアンを得る．$\mathcal{L}_0$ は，

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu - m\right)\psi(x) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\mathrm{I} \tag{11.8a}$$

になり，ラグランジアン密度に新たに加わった部分は，

$$\mathcal{L}_\mathrm{I} = -q\,\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\psi(x)\,A_\mu(x) \tag{11.8b}$$

と表される．式(11.2a)と式(11.2b)を組み合わせた変換の下で，共変微分 $D_\mu\psi(x)$ は次のように変換する．

$$D_\mu\psi(x) \ \rightarrow\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}D_\mu\psi(x) \tag{11.9}$$

すなわち場 $\psi(x)$ の変換(11.2b)と同じように変換する．したがって要請される通りに $\mathcal{L}$ はゲージ変換の下で不変になっている．

このアプローチをまとめると次のようになる．基本的な要請として物質場に対して局所的な位相変換に関する不変性を要請するならば，その物質場に結合するゲージ場を導入しなければならない．そのゲージ場は自由ラグランジアン密度において通常の微分 $\partial_\mu\psi$ を共変微分 $D_\mu\psi$ に置き換えることによって導入され，その結果として元の自由ラグランジアン密度に対して相互作用密度(11.8b)が加わる．これは“極小(ミニマル)ゲージ相互作用”(minimal gauge interaction)と呼ばれる．自身がゲージ不変な，より複雑な項を更に加えるような修正も原理的には可能である．しかし当面はそのような“極小(ミニマル)でない”相互作用を無視することにする．非極小(ノンミニマル)相互作用は QED において必要にはならないし，後から見るように，そのような措置は，繰り込み不可能な理論を導いてしまうからである．

11.2　量子色力学

前節において概説した“ゲージ理論”としての QED に対するアプローチは，相互作用の形の決まり方という観点において興味深いものである．強い相互作用において，未知の相互作用の詳しい形を推定するために，このような概念が用いられた．結果として得られた理論は量子色力学(quantum chromodynamics：QCD)と呼ばれるが，これはこの理論において，いわゆる色電荷(colour charge)が中心的な役割を担うからである．本節では，まず色の概念を，単純なクォーク模型の文脈において導入する．そして QED からの類推に基づき，ただし通常の電荷の代わりに色電荷の保存から出発して，ゲージ理論としての QCD の定式化を行う．

11.2.1 色と閉じ込め

核子や π 中間子やその他の強粒子 (hadron) は，クォーク (quark) と呼ばれる，より基本的なスピン $\frac{1}{2}$ 粒子の束縛状態である[1)]．現在，クォークには 6 種類の存在が知られており，それらを区別する指標は“香り”(flavour) と呼ばれる．香りの違いは，質量と電荷の違いによって特徴づけられる．d クォーク，s クォーク，b クォークは負電荷 $-e/3$ を持ち，u クォーク，c クォーク，t クォークは正電荷 $2e/3$ を持つ[§]．単純なクォーク模型では，重粒子 (baryon) は 3 つのクォークが束縛し合った状態と想定され，中間子はクォークと反クォークが束縛し合った状態と想定される．この模型は観測される強粒子のスペクトルを記述することにはかなりの成功を収めたが，この模型からは解釈しがたい事実が 2 つある．第 1 に，実験的には単独のクォークも，分数電荷を持つような他の束縛状態 (たとえば 2 クォーク束縛系) も決して見出されない．第 2 に，空間座標とスピンに関する重粒子の波動関数は，模型においては同じ香りを持つクォーク同士の入れ換えに関して対称でなければならず，これは 4.3.1 項で論じた基本的なスピン-統計の定理に抵触する．この問題は $\Omega^- \equiv sss$ のような重粒子において特に目立つ．Ω^- は同種の 3 個のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を，全体として対称な波動関数 (同じ状態) に含んでいるように見える．

上述のような現象は Han, Nambu (南部), Greenberg が 1964-1965 年に発展させた色 (color) の理論によって自然に説明される．この理論の基本的な仮定は，クォークが (レプトンとは違って) 空間座標やスピンの自由度の他に，色と呼ぶべきもうひとつの属性を持っている，というものである．すなわち $q = d, u, s, \ldots$ の何れのクォークにも，3 通りの異なる“色状態”があると考える．この仮定は実験によって直接証明された[2)]．これに応じて，クォークの波動関数は，

$$\Psi = \psi\chi^c$$

と書かれることになる．ψ は空間-スピン部分，χ^c は色の波動関数を表す．単一のクォークに関する 3 つの独立な色の波動関数は，通常 $\chi^c = r, g, b$ と書かれ[†]，次のように“色スピノル”として表現される．

[1)] 本書においては，クォーク模型に関して，この段落でまとめている以上の詳細を知っている必要はない．クォーク模型に関する一般的な背景を知りたい読者は次の文献を参照されたい．B. R. Martin and G. Shaw, *Particle Physics*, 3rd edn, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester (2008)．特に Chapter 3 および Chapter 6.

[§] (訳註) 6 種類の香りの呼称 : d: down，u: up，s: strange，c: charm，b: bottom，t: top. それぞれ (d,u), (s,c), (b,t) の左手型成分の組合せは (l, ν_l) $(l = e, \mu, \tau)$ と同様に，弱い相互作用の SU(2) 2 重項を形成する (クォークへの言及はほとんどないが，第 17-19 章を参照).

[2)] たとえば前記脚註の Martin and Shaw, Section 7.2.3 を参照.

[†] (訳註) r, g, b は，光の三原色 red, green, blue になぞらえた呼称である.

$$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11.10}$$

これは，スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の非相対論的なスピン波動関数 $\chi = \alpha, \beta$ が，Pauliスピノル，

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって表されるのと数学的には全く同様のことである．スピン波動関数に対して，2×2 エルミート行列で表されるスピン演算子が作用するように，色波動関数に対しては，3×3 エルミート行列で表される“色演算子”が作用する．色の3次元複素空間において，単位行列以外に8個の独立なエルミート行列を選ぶことができる．慣例として，次の行列の組がよく採用される．

$$\hat{F}_i = \frac{1}{2}\lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8) \tag{11.11a}$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{11.11b}$$

これらはPauli行列(A.62)を3次元化した類似物にあたる[3]．$\hat{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ は色電荷の演算子と呼ばれ，次の交換関係を満たす．

$$[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = \mathrm{i} f_{ijk} \hat{F}_k \tag{11.12a}$$

これ以降，繰り返された色電荷の添字については $k = 1, 2, \ldots, 8$ のように一緒に変更して和を取るものと見なす．“構造係数” f_{ijk} は式(11.11)から容易に決定される．これは全体として反対称である．

$$f_{ijk} = -f_{jik} = f_{jki} = -f_{kji} = f_{kij} = -f_{ikj} \tag{11.12b}$$

[3] 両方に関して，これらは対角和がゼロのエルミート行列であり，2次元および3次元の一般的なエルミート行列は，それぞれ単位行列と σ_i もしくは λ_i の線形結合によって表し得る．

表11.1 色電荷 $\hat{F}_i$ $(i=1,2,\ldots,8)$ の交換関係を与える係数 f_{ijk} の例．f_{ijk} 全体が反対称であることから，他のゼロ以外の係数も求まる．

ijk	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{ijk}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

表11.2 クォークと反クォークの色状態に関する色電荷 F_3 と F_8 の値．

(a) クォーク			(b) 反クォーク		
	F_3	F_8		F_3	F_8
r	$1/2$	$1/2\sqrt{3}$	$\bar{r}$	$-1/2$	$-1/2\sqrt{3}$
g	$-1/2$	$1/2\sqrt{3}$	$\bar{g}$	$1/2$	$-1/2\sqrt{3}$
b	0	$-1/\sqrt{3}$	$\bar{b}$	0	$1/\sqrt{3}$

f_{ijk} は i, j, k のどれか2つが等しければゼロになる．ゼロでない係数の一部を表11.1に与えておく．残りの係数は，式(11.12b) を用いて求めることができる．

色の理論において，色電荷は正確に保存するものと仮定される．しかしながら色演算子同士には可換ではない組合せもあるので，すべての色の同時固有関数は存在しない．$\hat{F}_3$ と $\hat{F}_8$ の組だけが可換であり，3つの色状態 $\chi^c = r, g, b$ は $\hat{F}_3$ と $\hat{F}_8$ の両方の固有状態にあたる．これらの単一クォーク状態の固有値は，式(11.10) と式(11.11) から直接に与えられる．これを表11.2(a) に示す．残りの演算子は色状態を変化させる．たとえば，次に示すような関係が容易に得られる．

$$\hat{F}_1 r = \frac{1}{2} g, \quad \hat{F}_1 g = \frac{1}{2} r, \quad \hat{F}_1 b = 0 \tag{11.13}$$

多クォーク状態 h は，波動関数の積によって記述される．

$$\chi_h^c \equiv \chi_1^c \chi_2^c \cdots \chi_n^c$$

ここで $\chi_1^c \equiv r_1, g_1, b_1$ etc. である．電荷演算子の作用は，分配則によって決まる．

$$\hat{F}_i \chi_1^c \chi_2^c = \left(\hat{F}_i \chi_1^c\right) \chi_2^c + \chi_1^c \left(\hat{F}_i \chi_2^c\right) \quad \text{etc.} \tag{11.14}$$

F_3 と F_8 の値は単純に，系を構成する組成クォークそれぞれの値を表11.2(a) を用いて足し合わせることによって得られる．クォークに対応する反クォーク状態 $\bar{r}$, $\bar{g}$, $\bar{b}$ については，表11.2(b) に示すように色電荷の符号が逆転する[4]．

[4] この結果は，通常の電荷と同様であるが，次節において導出する予定である．しばらくの間，仮定と見なしておく．

単純なクォーク模型の特異な特徴は，色の閉じ込め (confinement) の仮説から生じる．これは自由な強粒子(ハドロン)が，次式を満たす色 1 重項状態 χ_h^c としてのみ存在し得るというものである．

$$\hat{F}_i \chi_h^c = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8) \tag{11.15}$$

すなわち，任意の強粒子(ハドロン)について，たとえば，

$$F_3 = F_8 = 0 \tag{11.16}$$

が必ず成立している．表 11.2 の値を用いると，この仮説によって自由クォーク q や，クォーク対(つい) qq や，その他の分数電荷状態は存在できないこと，また観測される $q\bar{q}$ や qqq が許容されることが分かる．色の閉じ込めの仮説によって，3 個のクォークから成るものと想定される重粒子(バリオン)のスピン-統計の問題も解決する．表 11.2(a) により，式(11.16) の条件が満たされるのは，重粒子(バリオン)が r, g, b をひとつずつ含む場合だけに限られることが明白である．これにより重粒子(バリオン)の波動関数は，次の形に制約される．

$$\begin{aligned}\chi_B^c &= \alpha_1(r_1 g_2 b_3) + \alpha_2(g_1 r_2 b_3) + \alpha_3(b_1 r_2 g_3)\\ &\quad + \alpha_4(b_1 g_2 r_3) + \alpha_5(g_1 b_2 r_3) + \alpha_6(r_1 b_2 g_3)\end{aligned}$$

たとえば r_3 は，3 番目のクォークが r 状態にあることを意味する．係数 α_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ は定数であり，それらの値は残りの閉じ込め条件(11.15) によって制約される．たとえば $F_1 \chi_B^c = 0$ を課して，式(11.13) と式(11.14) を用いると，

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \quad \alpha_3 = -\alpha_4, \quad \alpha_5 = -\alpha_6$$

という関係が与えられる．式(11.15) の他の条件からも同様の関係が生じる．それらをまとめると，波動関数は規格化因子を除いて一意的に，

$$\chi_B^c = \varepsilon_{ijk}(r_i g_j b_k) \tag{11.17}$$

と決まる．添字 $i = 1, 2, 3$ などに関する和は，通例に従って行うものと見なす．対称性因子 ε_{ijk} は，i, j, k が $1, 2, 3$ の偶置換 (奇置換) にあたるときに $+1$ (-1)，2 つ以上の添字が共通の場合はゼロとなる因子である．これが全体として反対称なので，全波動関数 $\boldsymbol{\Psi} = \psi \chi_B^c$ に Pauli 原理を適用すると，色の波動関数に結合している空間-スピン波動関数 ψ は同種クォークの入れ換えの下で対称でなければならない．これはまさにクォーク模型において仮定されるべき性質である．

11.2.2 大域的な位相不変性と色電荷の保存

次に通常の電荷の保存ではなく，色電荷の保存を導くような対称変換を見出してみる．これを行うために，自由クォークのラグランジアン密度から議論を始める．

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_r^f(x)\big(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_f\big)\psi_r^f(x) + \bar{\psi}_g^f(x)\big(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_f\big)\psi_g^f(x) + \bar{\psi}_b^f(x)\big(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_f\big)\psi_b^f(x) \tag{11.18}$$

繰り返された香りの添字 $f = d, u, s, c, b, t$ については和を取るものと見なす．Dirac 場 $\psi^f_{r,g,b}$ は，香り f，色 r, g, b のクォークをそれぞれ表す．これを色の 3 成分場として組み合わせて簡単に表記する．

$$\mathbf{\Psi}^f(x) = \begin{pmatrix} \psi_r^f(x) \\ \psi_g^f(x) \\ \psi_b^f(x) \end{pmatrix} \tag{11.19a}$$

これに対応して，

$$\overline{\mathbf{\Psi}}^f(x) = \big(\bar{\psi}_r^f(x),\, \bar{\psi}_g^f(x),\, \bar{\psi}_b^f(x)\big) \tag{11.19b}$$

とする．ラグランジアン密度(11.18) は，次のように表される．

$$\mathcal{L}(x) = \overline{\mathbf{\Psi}}^f(x)\big(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_f\big)\mathbf{\Psi}^f(x) \tag{11.20}$$

これが，次の大域的変換の下で不変に保たれることは自明である．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Psi}^f(x) &\to \mathbf{\Psi}^{f\prime}(x) = U(\alpha)\mathbf{\Psi}^f(x) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i\lambda_i/2}\mathbf{\Psi}^f(x) \\ \overline{\mathbf{\Psi}}^f(x) &\to \overline{\mathbf{\Psi}}^{f\prime}(x) = \overline{\mathbf{\Psi}}^f(x)U^\dagger(\alpha) \equiv \overline{\mathbf{\Psi}}^f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_i\lambda_i/2} \end{aligned}\right\} \tag{11.21}$$

λ_i は，式(11.11b) の行列であり，α_i は 8 つの任意の実数 $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8)$ を表す．$U(\alpha)$ は SU(3) 群を構成する．これは 3×3 ユニタリー行列のうち，$\det U(\alpha) = +1$ の“特殊”ユニタリー行列で表現される要素を持つ群である．この理由から，上の変換を SU(3) 変換と呼ぶ．これは 1 次元の大域的位相変換(11.3) を一般化した，3 次元の大域的位相変換と見なすことができる．

色電荷の保存則は，SU(3) 変換の下での不変性からの帰結として現れる．α_i が無限小のとき，この変換は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Psi}^f(x) &\to \mathbf{\Psi}^{f\prime}(x) = \big(1 + \mathrm{i}\alpha_i\lambda_i/2\big)\mathbf{\Psi}^f(x) \\ \overline{\mathbf{\Psi}}^f(x) &\to \overline{\mathbf{\Psi}}^{f\prime}(x) = \overline{\mathbf{\Psi}}^f(x)\big(1 - \mathrm{i}\alpha_i\lambda_i/2\big) \end{aligned}\right\} \tag{11.22}$$

そして，式(2.39)のところと同様の議論により，保存する8つのカレントが得られる．

$$S_i^\mu(x) = \frac{1}{2}\,\overline{\mathbf{\Psi}}^f(x)\gamma^\mu\lambda_i\mathbf{\Psi}^f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8) \tag{11.23}$$

これらに対応する，保存する色電荷は，

$$\hat{F}_i \equiv \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, S_i^0(x) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathbf{\Psi}^{f\dagger}(x)\lambda_i\mathbf{\Psi}^f(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8) \tag{11.24}$$

と表される．これらは前項で導入した色電荷を，場の量子論の形で実現したものにあたる．このことを確認するために，具体的に次の演算子を考察してみる．

$$\hat{F}_3 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathrm{N}\Big[\psi_r^{f\dagger}(x)\psi_r(x) - \psi_g^{f\dagger}(x)\psi_g^f(x)\Big]$$

上式では式(11.11)と式(11.19)を利用し，また量子化に伴って，通例に従い，場の演算子の積を正規積として解釈することを明示した．場を式(4.38)によって展開すると，最終的に次式を得る．

$$\hat{F}_3 = \frac{1}{2}\left(N_r - \bar{N}_r\right) - \frac{1}{2}\left(N_g - \bar{N}_g\right) \tag{11.25}$$

ここで N_c $(\bar{N}_c)$ は，色の添字が c のクォーク(反クォーク)を，香り，運動量およびスピン状態について足し合わせた個数の演算子を表す．これは，前に示した結果(p.273，表11.2参照)と整合している．他の色電荷についても，同様の方法で結果を得ることができる(問題11.1)．

11.2.3　SU(3)ゲージ不変性

次に，SU(3)変換(11.22)を，大域的変換から局所的変換へと一般化する．この作業は11.1節においてQEDに関して行った手続きとよく似ている．局所的な位相変換の下でも不変性を実現するためには，ゲージ場を導入する必要があり，そのゲージ場とクォーク場との相互作用が自動的に要請されることになる．

最初の段階として，大域的なSU(3)変換(11.21)を，局所的な位相変換に置き換える．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Psi}^f(x) &\;\to\; \mathbf{\Psi}^{f\prime}(x) = \exp\Big[\mathrm{i}g_s\lambda_j\omega_j(x)/2\Big]\mathbf{\Psi}^f(x) \\ \overline{\mathbf{\Psi}}^f(x) &\;\to\; \overline{\mathbf{\Psi}}^{f\prime}(x) = \overline{\mathbf{\Psi}}^f(x)\exp\Big[-\mathrm{i}g_s\lambda_j\omega_j(x)/2\Big] \end{aligned}\right\} \tag{11.26a}$$

$\omega_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, 8)$ は，微分可能な任意の実数関数であり，g_s は後から結合定数に同定される実定数である．

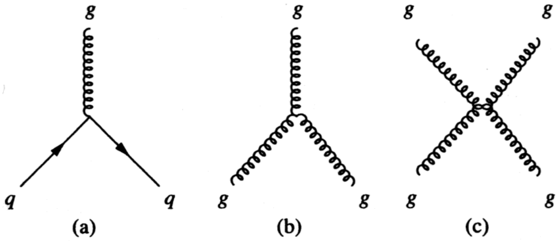


図11.1 式(11.28b)によって生成するクォーク-グルーオン結節点と，式(11.37)の第２項と第３項から生成されるグルーオン-グルーオン結節点.

自由場のラグランジアン密度(11.20)は，この局所的変換(11.26a)の下で不変ではなく，無限小の $\omega_j(x)$ の下で，次のように変換する.

$$\mathcal{L}_0 \;\to\; \mathcal{L}_0' = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2} g_s \overline{\Psi}^f(x)\lambda_j \partial\!\!\!/ \omega_j(x)\Psi^f(x)$$

後から見るように，QEDにおける式(11.7), (11.8)からの類推で，式(11.20)における $\partial^\mu \Psi^f(x)$ を，次の共変微分,

$$D^\mu \Psi^f(x) = \left[\partial^\mu + \mathrm{i} g_s \lambda_j A_j^\mu(x)/2\right]\Psi^f(x) \tag{11.27}$$

に置き換えるならば，$\mathcal{L}_0$は次のように変更される.

$$\mathcal{L}_q(x) = \overline{\Psi}^f(x)\left[\mathrm{i}D\!\!\!\!/ - m_f\right]\Psi^f(x) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\mathrm{I} \tag{11.28a}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{I} = -\frac{1}{2} g_s \overline{\Psi}^f(x)\gamma_\mu \lambda_j \Psi^f(x) A_j^\mu(x) \tag{11.28b}$$

ここで我々は８種類の保存する色電荷と，ゲージ変換(11.26a)における８つの任意の実関数 $\omega_j(x)$ に対応して，８個の実数ゲージ場 $A_j^\mu(x)$ を導入した．これらはグルーオン場 (gluon field) と呼ばれる．式(11.28b)の相互作用はQEDの相互作用(11.8b)と同様に摂動のダイヤグラムにおいてクォーク-グルーオンの３点結節点（ヴァーテックス）‡を形成する．これを図11.1(a)に示す．行列 λ_j には対角行列ではない行列もあるので，この相互作用は r, g, b の中のある色のクォークをひとつ消滅させ，別の色のクォークを生成することもあり得る．したがって色の保存の要請から，ゲージ場 $A_j^\mu(x)$ の量子であるグルーオンもゼロでない色電荷を持たなければならない．これはQEDにおいて相互作用を媒介する光子が電荷を持たないこととは対照的な性質である.

‡(訳註) “three-point vertex”．三叉構造を持つ結節点のことだが，伝播関数の端点３つを結び付けている結節点という意味で，このように呼ばれる.

修正された相互作用 $\mathcal{L}_q$ が，変換(11.26a) の下で不変となるためには，この変換とグルーオン場 $A_j^\mu(x)$ の変換を組み合わせて，共変微分 $D^\mu \Psi^f(x)$ を $\Psi^f(x)$ 自身と同じように変換させる必要がある．すなわち，

$$D^\mu \Psi^f(x) \;\rightarrow\; \exp\left[\mathrm{i} g_s \lambda_j \omega_j(x)/2\right] D^\mu \Psi^f(x) \tag{11.29}$$

でなければならない．有限の $\omega_j(x)$ に関しては，結果として得られる変換は極めて複雑なものになる．しかしながら無限小の関数 $\omega_j(x)$ に関する変換を考察すれば充分である．本章の付録において，小さい $\omega_j(x)$ の下で必要とされる無限小変換が，次式で与えられることを示す予定である．

$$A_i^\mu(x) \;\rightarrow\; A_i^{\mu\prime}(x) \equiv A_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g_s f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x) \tag{11.26b}$$

f_{ijk} は式(11.12) において定義した構造係数である．式(11.26a) と式(11.26b) を組み合わせた変換を SU(3) ゲージ変換と呼び，これらの変換の下で不変な任意の理論を，SU(3) ゲージ不変な理論と称する．

ラグランジアン密度(11.28) はクォーク場と，そのグルーオン場との相互作用を記述する．QCD の完全なラグランジアン密度は，クォークが存在しないときのグルーオンを記述する項も含む．この項も SU(3) ゲージ不変性のために必要とされる．

QED では，ラグランジアン密度(5.8) が次の項を含む．

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{11.30}$$

この項は自由な光子を記述しており，$F_{\mu\nu}(x)$ は電磁場テンソル(5.5) である．この自由光子の項(11.30) は，電磁場テンソル $F^{\mu\nu}$ だけに依存するのでゲージ不変である．これと類似の式を考えよう．

$$-\frac{1}{4} F_{i\mu\nu}(x) F_i^{\mu\nu}(x) \tag{11.31}$$

ここで，

$$F_i^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu A_i^\mu(x) - \partial^\mu A_i^\nu(x) \tag{11.32}$$

は質量のないグルーオンが形成するテンソル場を表すものと考えられる．しかしながら，この場は式(11.26b) の $-g_s f_{ijk} \omega_j(k) A_j^\mu(x)$ の項のために，ゲージ変換の下で不変では“ない”．ゲージ不変性を回復するために，さらに付加的な相互作用項を導入する必要がある．本章の付録に示すように，式(11.31) において $F_i^{\mu\nu}(x)$ を，

$$G_i^{\mu\nu}(x) \equiv F_i^{\mu\nu}(x) + g_s f_{ijk} A_j^\mu(x) A_k^\nu(x) \tag{11.33}$$

に置き換えて得られる密度,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu}(x) G_i^{\mu\nu}(x) \tag{11.34}$$

はゲージ不変である．この式の物理的な解釈を以下に論じる．

11.2.4 量子色力学

量子色力学は，式(11.28) のクォーク項と，式(11.34) のグルーオン項を組み合わせたラグランジアン密度,

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}^f(x)\left[\mathrm{i}\not{D} - m_f\right]\Psi^f(x) - \frac{1}{4} G_{i\mu\nu}(x) G_i^{\mu\nu}(x) \tag{11.35}$$

によって定義される理論である．これは自由クォークのラグランジアン(11.20) がゲージ不変になるために必要とされる極小(ミニマル)相互作用を導入したものである．QED の場合と同様に，より複雑なゲージ不変項を付け加えることも容易である．たとえば,

$$\mathrm{i}g_s' \bar{\Psi}^f(x)\Psi^f(x) G_{i\mu\nu}(x) G_i^{\mu\nu}(x) \tag{11.36}$$

を加えることが考えられる．しかしながら，このような項は繰り込み可能性に抵触することを 11.3節において示す予定である．

QED とは異なり，QCD は強い相互作用を記述するが，その最低次の摂動は一般によい近似にはならない．このことに関する議論は後回しにする．

まず，ラグランジアン密度(11.35) から直接に推定できる QCD の物理的な性質をいくつかまとめてみる．グルーオンから考察を始めよう．式(11.33) を式(11.34) に代入すると，ラグランジアン密度に対する純粋なグルーオンからの寄与として，次式を得る．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G = &-\frac{1}{4} F_{i\mu\nu}(x) F_i^{\mu\nu}(x) + g_s f_{ijk} A_{i\mu}(x) A_{j\nu}(x) \partial^\mu A_k^\nu(x) \\ &-\frac{1}{4} g_s^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu(x) A_k^\nu(x) A_{l\mu}(x) A_{m\nu}(x)\end{aligned} \tag{11.37}$$

式(11.37) の第 1 項は，質量ゼロでスピン 1 の 8 種類の自由グルーオン場のラグランジアン密度(11.31) である．すでに言及したように，これらのグルーオンはゼロでない色電荷を持ち，色の閉じ込め効果のために，孤立状態で観測されることがない．それでも，グルーオンが存在することを示す実験的な証拠は豊富に存在する[5]．

[5] たとえば B. R. Martin and G. Shaw, *Particle Physics*, 3rd edn, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester (2008), 特に Section 7.2.2 を参照．

これに対して第2項と第3項は，グルーオン場同士の相互作用を表す．これらは摂動論において，図11.1の(b), (c)にそれぞれ示すような3点結節点(ヴァーテックス)や4点結節点(ヴァーテックス)を形成する[6]．グルーオンの自己相互作用は，この理論に備わっている最も驚くべき特徴である．この性質は色電荷の間の相互作用を媒介するグルーオン自体も，ゼロでない色電荷を持つことから生じている．これはQEDでは光子が電荷を持たず，光子の基本的な自己相互作用が存在しないことと対照される性質である．

QCDにおけるもうひとつの基礎的な性質は"香り(フレーバー)独立性"(flavour independence)である．すなわち，式(11.28b)におけるクォーク-グルーオン相互作用の強さと形は，クォークの香り $f = d, u, s, \ldots$ には依存しない．このことは，質量に大きな違いのない u クォークと d クォークにおいて，最も顕著な結果をもたらす．もし u クォークと d クォークの質量が全く等しければ，u と d は強い相互作用に関してまったく同じ性質を持ち，u と d がひとつ入れ替わっただけの関係にある陽子 $p \equiv uud$ と中性子 $n \equiv udd$ は同じ質量を持つはずである．この対称性——"アイソスピン対称性[7]"と呼ばれる——は，現実の自然界においてはクォーク質量の差や電磁相互作用の違いによって破れているが，近似としては大変よく成立している．

最後に，QCDにおいて6種類のクォーク数それぞれが保存されることを指摘しておく．保存される各クォーク数は，

$$N_f \equiv N(f) - N(\bar{f}) \qquad (f = d, u, s, c, b, t) \tag{11.38}$$

のように，同じ香り f を持つクォークの数と反クォークの数の差として定義される．これは，QEDにおいてレプトン数(7.53)の保存がQEDラグランジアン密度(7.52)から導かれたのと同様の方法で，ラグランジアン密度(11.28)から導かれる．式(11.38)の6種類のクォーク数の中には，対応する呼称を持つものもある．たとえば奇妙さ数(ストレンジネス)は $S \equiv -N_s$ と定義される．チャーム数は $C \equiv N_c$ である．これらのクォーク数は，実際に強い相互作用の下で保存することが，実験的にも確認されている．

11.3 他の相互作用？

前節ではQEDとQCDを極小(ミニマル)ゲージ理論として定式化した．結果として得られた理論は両方とも繰り込み可能である(QCDに関してはまだ具体的に見ていないが)．

---

[6] これらの結節点の詳細な形は14.3.3項で導出する．

[7] アイソスピン対称性に関する簡単な議論は，たとえば前出 Martin and Shaw (p.271脚註), Section 6.1 および Appendix C を参照．

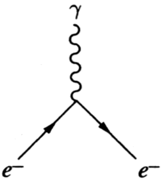


図11.2 式(11.8b)によって生成される QED の３点結節点.

ここでは極小（ミニマル）でない項の可能性を考え，このような項が繰り込み可能性の要請によって排除されることを示す.

11.3.1 非極小相互作用

非極小（ノンミニマル）相互作用 (non-minimal interaction) とは，ラグランジアン密度(11.8) もしくは(11.35) に対して，ゲージ不変性を破ることなく付け加えることのできるゲージ不変な項 $\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}$ のことである．QED において Dirac 共変量(A.53) と電磁場テンソル,

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^{\nu}A^{\mu}(x) - \partial^{\mu}A^{\nu}(x)$$

は，ゲージ変換(11.2) の下でそれぞれ個々に不変である．したがって，任意の数のそのような共変因子で構成される Lorentz スカラー積もまた，極小（ミニマル）でない相互作用の候補になり得る．最も単純で最も興味深い可能性として，

$$\mathcal{L}'_{\mathrm{I}} = \frac{g_1}{2}\,\bar{\psi}(x)\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi(x)\,F_{\mu\nu}(x) = g_1\bar{\psi}(x)\,\sigma^{\mu\nu}\,\psi(x)\,\partial_{\nu}A_{\mu} \tag{11.39}$$

という形が考えられる．$\sigma^{\mu\nu}$ は反対称テンソル(A.9) である．これは本来の QED の相互作用(11.8b) と同じ場 $\bar{\psi}(x)$，$\psi(x)$，$A^{\mu}(x)$ を含んでおり，やはり図11.2 のような３点結節点（ヴァーテックス）を形成するが，異なる結節点（ヴァーテックス）因子が充てられることになる．この結節点（ヴァーテックス）因子の導出方法は，7.2.1 項に示した QED の結節点（ヴァーテックス）に関する計算方法とよく似たものなので，読者にこれを思い出してもらい，式(11.39) に電磁場の微分が含まれることによる新たな特徴を，これから指摘する.

6.2 節において，相互作用描像では相互作用ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)$ が場の演算子の微分を含まない限り，相互作用をする場は自由場と同じ運動方程式と同じ交換関係を満たすことを見出した．この結果を利用して S 行列展開(6.23) を得て，そこから

第7章で，QEDのFeynman規則を導いた．しかしながら $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)$ が微分を含むか否かに関わらず，一般的に妥当なS行列展開の形は，

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int\ldots\int\mathrm{d}^4x_1\ldots\mathrm{d}^4x_n\mathrm{T}\Big\{\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x_1)\ldots\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x_n)\Big\} \tag{11.40}$$

と与えられる．但しS行列の要素の評価には，自由場の交換関係を用いるものとする[8]．QEDにおいては，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)=-\mathcal{H}_{\mathrm{I}}(x)=e\Big(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}\Big)_x \tag{11.41}$$

であり，式(11.40)は式(6.23)に帰着する．これらの結果から，QED相互作用(11.41)に対して非極小（ノンミニマル）相互作用(11.39)が加えられても，依然として第7章のQEDに関する手続きが適用できる．

7.2.1項では，S行列展開(11.40)の1次の項，

$$S^{(1)}=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) \tag{11.42}$$

の自由粒子状態間の行列要素を評価することにより，QEDの結節点（ヴァーテックス）因子 $\mathrm{i}e\gamma^{\alpha}$ を得た．行列要素から1次のFeynman振幅を求め，そこから外線因子を省くことによって結節点（ヴァーテックス）因子が決まった．具体的には，基本的な過程 $e^-\to e^-+\gamma$ の1次の振幅，

$$\mathcal{M}=\mathrm{i}e\,\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^{\mu}u(\mathbf{p})\varepsilon_{\mu}(\mathbf{k}'=\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tag{7.32}$$

から結節点因子が $\mathrm{i}e\gamma^{\mu}$ と与えられた．もちろん図7.1 (p.116)の他の基本過程からも，同じ結節点（ヴァーテックス）因子が得られる．

非極小（ノンミニマル）相互作用(11.39)を含めると，QED相互作用(11.41)は次式に置き換わる．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)=e\Big(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}\Big)_x+g_1\Big(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\partial_{\nu}A_{\mu}\Big)_x \tag{11.43}$$

同じ $e^-\to e^-+\gamma$ の過程を計算すると，振幅は式(7.32)の代わりに次式になる．

$$\mathcal{M}=\mathrm{i}\bar{u}(\mathbf{p}')\Big[e\gamma^{\mu}+\mathrm{i}g_1\sigma^{\mu\nu}k'_{\nu}\Big]u(\mathbf{p})\varepsilon_{\mu}(\mathbf{k}') \tag{11.44}$$

したがって，結節点因子は，

$$\mathrm{i}e\gamma^{\mu}-g_1\sigma^{\mu\nu}k'_{\nu} \tag{11.45}$$

---

8) このS行列展開の導出については，次の文献を参照．N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, 3rd edn, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979, Section 21.

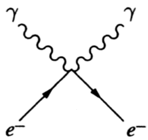


図11.3 非極小電磁相互作用(11.47)によって生成される4点結節点.

となる．第2項の運動量因子 k'_ν は，式(11.43)において電磁場の微分が含まれることの直接的な帰結である．結合定数 g_1 の解釈は，Gordon恒等式(A.80)を用いて式(11.44)を次の形に直すことで得られる．

$$\mathcal{M} = \mathrm{i}\bar{u}(\mathbf{p}')\left[\frac{e(p+p')^\mu}{2m} - \mathrm{i}\left(\frac{e}{2m} - g_1\right)\sigma^{\mu\nu}k'_\nu\right]u(\mathbf{p})\,\varepsilon_\mu(\mathbf{k}') \tag{11.46}$$

つまり g_1 は，輻射補正によって生じる異常磁気能率に，さらに追加的に上乗せされる磁気能率を表している[9]．

磁気相互作用(11.39)は，非極小(ノンミニマル)な相互作用の最も単純な一例に過ぎない．他の形の相互作用も容易に構築できる．たとえば，

$$\mathcal{L}''_{\mathrm{I}} = g_2\,\bar{\psi}(x)\,\psi(x)\,F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x) \tag{11.47}$$

は，図11.3に示すような4点結節点(ヴァーテックス)を生成する．一般に非極小(ノンミニマル)相互作用は，結合定数 g_i の n.u. 次元によって特徴づけられる．この次元は，相互作用ラグランジアン密度の形と，表6.1 (p.103) の場の次元から決まることになる．この方法で，たとえばQEDの極小(ミニマル)相互作用(11.8b)は無次元の結合を持つこと，すなわち $[q] = [e] = 0$ が分かる．これ以降，任意の量 α の n.u. 次元を $[\alpha]$ と表記する．非極小相互作用は必然的に極小相互作用より余計に微分や場の因子を含み，そのことから結合定数の次元は $[g_i] < 0$ となる．たとえば相互作用(11.39)では $[g_1] = -1$，相互作用(11.47)では $[g_2] = -3$ となる．QCDでも同様の結果が得られる．相互作用を無視して考えると，ラグランジアン密度(11.35)は，クォーク場およびグルーオン場の自然単位の次元として $[\mathbf{\Psi}^f] = 3/2$ および $[A_i^\mu] = 1$ を含意しており，これはそれぞれ電子場と電磁場の次元に等しい．したがって極小(ミニマル)相互作用(11.28b)は無次元結合 $[g_s] = 0$ である．非極小(ノンミニマル)な相互作用は再び余計な微分や場の因子を含むことになり，やはり結合定数の次元が $[g_i] < 0$ になる．たとえば非極小(ノンミニマル)相互作用(11.36)では $[g'_s] = -3$ であ

[9] 9.6.1項参照.

る．これらの結果は，理論の繰り込み可能性に関する簡単な判定規準になる．次項において，結合定数が負の次元を持つ相互作用を含む理論は繰り込み不可能であるという一般的な定理を導く．

11.3.2 繰り込み可能性

本節では，非極小(ノンミニマル)相互作用を含む理論の繰り込み可能性を調べる．この議論は 9.9 節において QED の繰り込み可能性を調べたときの議論と似たものである．QED における議論を読者に思い出してもらった後で，磁気相互作用 (11.39) を含めると，繰り込み不可能になることを示す．それから，この結果がすべての非極小(ノンミニマル)相互作用に適用されることを，簡単な次元の議論によって明らかにする．

9.9 節において我々は，基本発散グラフだけを考察すれば充分であり，他の発散はすべてそこから構築されることを見た．そして，そのようなグラフの発散次数 K は，被積分関数の分子と分母にある運動量変数の冪(べき)を数えることによって見出されることを示した．基本発散グラフに対して得た条件 $K \geq 0$ は発散の " 必要条件 " であり[§]，$K \geq 0$ のグラフの一部は特殊な対称性のために収束する．QED におけるこのことの実例は，3 光子の三角グラフ (p.191, 図9.6の(c),(d)) や，光-光散乱グラフ (p.230, 図9.24) において見られた．

さらに 9.9 節で，理論が繰り込み可能であるためには，あらゆる基本発散グラフの発散次数 K が，結節点(ヴァーテックス)の数に依存して増加してはならないこと，そして外線の数と種類によって特定される基本発散グラフ (基本発散結節部分(ヴァーテックス)) の種類が有限個でなければならないことを見出した．

QED に関する発散の必要条件は 2 段階の作業によって得られた．第 1 に，f_{i} 本 (b_{i} 本) のフェルミオン内線 (光子内線) を持つグラフの発散次数は，

$$K = 4d - f_{\mathrm{i}} - 2b_{\mathrm{i}} \qquad (9.109)$$

であることに注目した．d は全結節点(ヴァーテックス)におけるエネルギー-運動量保存条件によって固定されない内部運動量の数である．そして各結節点(ヴァーテックス)におけるエネルギー-運動量の保存と，結節点(ヴァーテックス)には図11.2 (p.281) のように 2 本のフェルミオン線と 1 本の光子線が接続していることから，d と内線・外線数や摂動次数を関係づける式(9.110) と式(9.111) を用いて上式を書き直せる．この方法で，f_{e} 本 (b_{e} 本) のフェルミオン外線 (光子外線) を持つグラフが基本発散グラフとなる必要条件として，

[§](訳註) このため K を " 見かけの " (superficial) 発散次数と呼ぶ場合がある．

$$K = 4 - \frac{3}{2} f_{\mathrm{e}} - b_{\mathrm{e}} \geq 0 \tag{9.112}$$

を得た．この結果はグラフの摂動次数 n には依存しない．

式(9.112) は極小(ミニマル)QED の重要な特徴を示している．これは基本発散結節(ヴァーテックス)部分の種類(外線本数の組 $(f_{\mathrm{e}}, b_{\mathrm{e}})$) が有限個であり，その発散次数が高次グラフを含めても増加しないことを意味している．言い換えると，理論の基本発散は，有限個の発散定数によって記述される．これらを有限個の物理定数に吸収させることで，9.9節で論じたように，繰り込まれた理論が成立する．

次に，上述の議論を磁気相互作用(11.39) を加えた場合について繰り返してみる．極小(ミニマル)QED との違いの要点は，新たな結節点(ヴァーテックス)因子(11.45) が，その結節点(ヴァーテックス)に接続している光子の運動量 k^{μ} に対して１次で依存することにある．それぞれの光子内線は２箇所の結節点(ヴァーテックス)に関わるので，各光子伝播関数による収束因子 k^{-2} はそれぞれ２つの結節点によって打ち消され，見かけの発散次数は式(9.109) の代わりに，

$$K = 4d - f_{\mathrm{i}} \tag{11.48}$$

となる．しかし図11.2 (p.281) の結節点(ヴァーテックス)にも２本のフェルミオン線と１本の光子線が接続しており，未定運動量の数と内外線本数および摂動次数の関係を与える式(9.110) と式(9.111) は変わらない．これらを式(11.48) と組み合わせると，摂動次数が n で，f_{e} 本 (b_{e} 本) のフェルミオン外線 (光子外線) を持つグラフが基本発散グラフとなる条件として，次式が得られる．

$$K = 4 - \frac{3}{2} f_{\mathrm{e}} - 2b_{\mathrm{e}} + n \geq 0 \tag{11.49}$$

極小(ミニマル)QED の結果(9.112) と比較して，式(11.49) は摂動次数 n に応じて発散次数 K が増加する点が異なる．充分に高次になると，あらゆる $(f_{\mathrm{e}}, b_{\mathrm{e}})$ の組において基本発散が起こり，n の増加とともに発散次数が増える．これらの発散を有限個の発散定数によって記述することはできず，したがって有限個の物理定数に吸収させることも不可能である．つまり磁気相互作用(11.39) を導入した理論は繰り込み不可能である．

上記の議論を任意の非極小(ノンミニマル)相互作用に適用できるように一般化する作業が残っている．要点は，任意の基本発散グラフの見かけの発散次数が，必ず次の形になるということである．

$$K = K_0(b_{\mathrm{e}}, f_{\mathrm{e}}) - n[g] \tag{11.50a}$$

ここで $K_0(b_{\mathrm{e}}, f_{\mathrm{e}})$ は摂動次数 n に依存せず，$[g]$ は結合定数の次元を表す．後ろの項は，任意の結節(ヴァーテックス)部分 $(b_{\mathrm{e}}, f_{\mathrm{e}})$ において摂動次数を Δn 変更すると，結節部分自体の

n.u.次元が変わらないために，運動量因子の数が $-\Delta n[g]$ だけ変わるという補償の必要性を表している．外線の本数 (b_e, f_e) を固定すると，これは内部運動量でしかあり得ないというのが，見かけの発散次数(11.50a)の含意である．いくつかの異なる結合定数が含まれる場合には，次のように修正される．

$$K = K_0(b_e, f_e) - \sum_i n_i[g_i] \tag{11.50b}$$

$n_1, n_2, \ldots$ はそれぞれ結合 $g_1, g_2, \ldots$ の摂動次数を表す．たとえば式(9.112)と式(11.49)は，$[e] = 0$，$[g_1] = -1$ なので，この形に整合している．

式(11.50)により，もし，ある理論において任意の結合 g_i が $[g_i] < 0$ の次元を持つならば，その摂動次数 n_i に依存してすべての結節部分(ヴァーテックス) (b_e, f_e) の発散がどんどん強くなるので，その理論は繰り込み不可能である．このことからQEDとQCDに関しては，非極小(ノンミニマル)相互作用を加えると，相互作用が負の次元を持ってしまうので繰り込み不可能になる．QEDとQCDの繰り込み可能な理論としては，極小(ミニマル)相互作用だけを含むものが唯一の候補になるのである[10]．QEDの繰り込み可能性は9.9節で既に論じた．QCDも繰り込み可能であるが，これを確認するには，まずQCDに関するFeynman規則を導かなければならない．これはQEDの場合よりも複雑なものになるが，第14章でこれを論じることにする．

次のことを指摘して，本節を終えることにしよう．上述の方法，すなわち冪(べき)の勘定を利用して式(9.112)や式(11.49)のような関係を得る方法は，Feynman規則が分かっている任意の理論に関して，その繰り込み可能性の判定に利用できる．

言い添えるならば，式(11.50)の導出は，粒子質量をゼロと設定しても収束性が変わらない任意の理論に対して成立する．QEDやQCDのように，質量を持つスピン $\frac{1}{2}$ のフェルミオンを含む理論では，この性質は伝播関数(7.48)の形によって成立する．質量を持つスピン0のボゾンに関しては，対応する伝播関数(3.59)の形に因る．したがって，式(11.50)は次の一般的な定理を意味することになる[11]．

『結合 g_i が負の次元 $[g_i] < 0$ を持つような相互作用を含む理論は，繰り込み不可能な理論である．』

---

10) この声明は，暗にCP不変性，あるいは等価的にT不変性を仮定したものである．この制約を外すと，QCDに対して Θ-項と呼ばれる付加的な項が許容される．このような項の存在の可能性は，極めて高精度の実験によって排除されている．ここではこれ以上は言及しないが，たとえば W. Rolinick, *The Fundamental Particles and their Interactions*, Addison-Wesley, 1994, Section 16.1 を参照されたい．

11) 16.3節で見る予定だが，質量を持つスピン1の粒子の伝播関数は，質量をゼロに近づけると特異性を示すような項を含む．そのような項はダイヤグラムを更に発散的にするだけで繰り込み可能性に寄与することはないので，定理には抵触しない．

この定理は容易に応用が利き，大変有用である．問題11.4-6 を参照されたい．

11.4 付録：SU(3) ゲージ変換の２つの性質

この付録では，本章の前の方で引用だけしておいた，次の２つの結果を導出する．(i) グルーオン場 $A_i^\mu(x)$ の変換則 (11.26a)，(ii) グルーオン場のラグランジアン密度 (11.34) の SU(3) ゲージ不変性．

次のように 3×3 行列を導入すると，導出過程が見やすくなる[12]．

$$\omega(x) \equiv \lambda_i \omega_i(x), \qquad A^\mu(x) \equiv \lambda_i A_i^\mu(x) \tag{11.51}$$

更に，この付録では，表記を簡単にするために，すべての量について引数 x を省略する．つまり $\omega \equiv \omega(x)$，$\mathbf{\Psi}^f \equiv \mathbf{\Psi}^f(x)$ 等々である．

式 (11.11) と式 (11.12) から，行列 (11.51) は次の交換関係を満たす．

$$[\omega, A^\mu] = 2\mathrm{i} f_{ijk} \lambda_i \omega_j A_k^\mu \tag{11.52}$$

共変微分 (11.27) を式 (11.51) の行列によって表すと，次の形になる．

$$D^\mu \mathbf{\Psi}^f = \left[\partial^\mu + \mathrm{i} g_s A^\mu/2\right] \mathbf{\Psi}^f \tag{11.53}$$

$\mathbf{\Psi}^f$ の局所的な位相変換 (11.26a) は，無限小の ω の下では，次のように表される．

$$\mathbf{\Psi}^f \;\to\; \mathbf{\Psi}^{f\prime} = \left[1 + \mathrm{i} g_s \omega/2\right] \mathbf{\Psi}^f \quad (\text{small } \omega) \tag{11.54}$$

11.4.1 変換則 (11.26b)

11.2.3 項において見たように，我々はゲージ場 A^μ が，次の無限小変換，

$$A^\mu \;\to\; A^{\mu\prime} = A^\mu + \delta A^\mu \tag{11.55}$$

($\delta A^\mu \equiv \lambda_i \delta A_i^\mu$) に従うことを要請して，共変微分 $D^\mu \mathbf{\Psi}^f$ が次のように，場 $\mathbf{\Psi}^f$ そのものと同じ変換をするようにする．

$$\begin{aligned} D^\mu \mathbf{\Psi}^f &\to \left[1 + \mathrm{i} g_s \omega/2\right] D^\mu \mathbf{\Psi}^f \\ &= \left[1 + \mathrm{i} g_s \omega/2\right]\left[\partial^\mu + \mathrm{i} g_s A/2\right] \mathbf{\Psi}^f \end{aligned} \tag{11.56}$$

---

[12] この記法は，この付録だけに限って使用するものである．他の部分では $A^\mu(x)$ は電磁場である！

$\omega_j(x)$ は無限小の値をとる関数である．

式(11.53)に変換(11.54)と(11.55)を適用すると，次のようになる．

$$D^\mu \Psi^f \;\to\; \left[\partial^\mu + \mathrm{i}g_s A^\mu/2 + \mathrm{i}g_s \delta A^\mu/2\right]\left[1 + \mathrm{i}g_s\omega/2\right]\Psi^f \tag{11.57}$$

式(11.56)と式(11.57)の右辺を，２次の項を無視して比較すると，

$$\delta A^\mu = -\partial^\mu\omega + \frac{1}{2}\mathrm{i}g_s[\omega, A^\mu] \tag{11.58}$$

である．交換関係(11.52)と，定義(11.51)を式(11.58)に代入すると，式(11.26b)として引用した変換式が即座に得られる．

$$\delta A_i^\mu(x) = -\partial^\mu\omega_i(x) - g_s f_{ijk}\omega_j(x) A_k^\mu(x) \tag{11.59}$$

11.4.2　式(11.34)のSU(3)ゲージ不変性

式(11.34)，すなわち $A_i^\mu(x)$ 場のラグランジアン密度，

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}G_i^{\mu\nu} \tag{11.60}$$

がSU(3)変換の下で不変であることを示そう．ここで，

$$G^{\mu\nu} \equiv \lambda_i G_i^{\mu\nu} \tag{11.61}$$

と定義すると便利である．そして，

$$\mathrm{Tr}(\lambda_i\lambda_j) = 2\delta_{ij} \tag{11.62}$$

を用いると，$\mathcal{L}_G$ は次のように書かれる．

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{8}\mathrm{Tr}\left(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\right) \tag{11.63}$$

$\mathcal{L}_G$ の不変性を証明するために，まず $G^{\mu\nu}$ の変換則を導く．式(11.11)と式(11.12)により，

$$2\mathrm{i}\lambda_i f_{ijk}A_j^\mu A_k^\nu = [A^\mu, A^\nu] \tag{11.64}$$

が得られる．式(11.61)に式(11.32)と式(11.33)を代入し，式(11.64)を用いると，次式を得る．

$$G^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2}\mathrm{i}g_s[A^\mu, A^\nu] \tag{11.65}$$

SU(3) 変換の下で，A^μ には式(11.58) によって与えられる変化 δA^μ が生じる．したがって $G^{\mu\nu}$ の変化は，次のように与えられる．

$$\delta G^{\mu\nu} = \partial^\nu(\delta A^\mu) - \partial^\mu(\delta A^\nu) - \frac{1}{2}\mathrm{i}g_s[\delta A^\mu, A^\nu] - \frac{1}{2}\mathrm{i}g_s[A^\mu, \delta A^\nu] \tag{11.66}$$

式(11.58) を式(11.66) に代入して式を変形すると，次式が得られる．

$$\delta G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{i}g_s[\omega, \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu] + \frac{1}{4}g_s^2[[\omega, A^\mu], A^\nu] + \frac{1}{4}g_s^2[[A^\nu, \omega], A^\mu] \tag{11.67}$$

ここで，Jacobi 恒等式,

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] \equiv 0$$

を利用すると，式(11.67) は次のように書き直される．

$$\delta G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{i}g_s[\omega, \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu] - \frac{1}{4}g_s^2[[A^\mu, A^\nu], \omega]$$

式(11.65) により，上式は次式へ簡約される．

$$\delta G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{i}g_s[\omega, G^{\mu\nu}] \tag{11.68}$$

この変化 $\delta G^{\mu\nu}$ により，式(11.63) の $\mathcal{L}_G$ に生じる変化は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_G &= -\frac{1}{8}\mathrm{Tr}\Big(\delta G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + G_{\mu\nu}\delta G^{\mu\nu}\Big) \\
&= -\frac{1}{16}\mathrm{i}g_s\mathrm{Tr}\Big\{[\omega, G_{\mu\nu}]G^{\mu\nu} + G_{\mu\nu}[\omega, G^{\mu\nu}]\Big\} \\
&= -\frac{1}{16}\mathrm{i}g_s\mathrm{Tr}[\omega, G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] = 0
\end{aligned} \tag{11.69}$$

最後の行では，恒等式 $\mathrm{Tr}[A, B] \equiv 0$ を用いた．式(11.69) によって $\mathcal{L}_G$ の SU(3) 不変性が確認された．

練習問題

11.1 自由クォーク理論(11.20) について，式(11.25) を証明し，色電荷 $\hat{F}_8$ に対応する式を求めよ．式(11.24) を用いて，

$$\hat{F}_1|r, \mathbf{p}, s\rangle = \frac{1}{2}|g, \mathbf{p}, s\rangle$$

を示せ．$|r, \mathbf{p}, s\rangle$ は，色 r，運動量 $\mathbf{p}$，スピン s の自由クォークがひとつある状態を表す (式(11.13) 参照)．

11.2 相互作用(11.43) に対応する結節点因子(11.45) を導け．

11.3 非極小相互作用(11.47)に対応する結節点因子を導け.

11.4 次のラグランジアン密度によって記述される実スカラー場 $\phi(x)$ を考える.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + g\frac{\phi(x)^p}{p!}$$

$\mathcal{L}_0$ は自由場のラグランジアン密度(3.4), g は結合定数, $p \geq 3$ は整数で, 場の積は通例に従って正規積と解釈する.

結合定数の自然単位次元 $[g]$ を推定して, $p \geq 5$ の場合に繰り込み不可能となることを示せ.

$p = 3$ と置いた“ϕ^3 理論”について, 相互作用結節点の形と結節点因子を推定せよ. 摂動次数が n で, ボゾン外線の本数が $b_e \geq 2$ のグラフの見かけの発散次数が,

$$K = 4 - b_e - n$$

と与えられることを示し, これを用いて ϕ^3 理論では基本発散グラフがひとつだけ存在することを示せ.

注意：発散グラフが有限個しかない理論を“超繰り込み可能”な理論と呼ぶことがある.

11.5 実スカラー場 $\phi(x)$ とスピノル場 $\psi(x)$ の相互作用を考える. 局所的な Lorentz 不変相互作用 $\mathcal{L}_I$ が, スカラー場 ϕ またはその微分 (あるいは両方) と, 5つの基本的な双一次共変量(A.53)を用いて形成されるものと仮定する. 結合定数の次元を考察することにより, 繰り込み可能な相互作用の唯一の候補が,

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x) \tag{11.70}$$

であることを示せ. 但しここではパリティ保存を仮定し, $\phi(x)$ がスカラー場,

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t, -\mathbf{x})$$

であることを仮定する. また, 擬スカラー場,

$$\phi(t, \mathbf{x}) = -\phi(t, -\mathbf{x})$$

を仮定した場合に, これに対応する繰り込み可能でパリティを保存する相互作用はどのようになるか.
(後者は擬スカラー中間子理論と呼ばれ, 中性 π 中間子の交換による長距離核力の記述に利用される.)

11.6 次のラグランジアン密度で与えられる“スカラー中間子理論”を考える.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_0(\psi) + g\bar{\psi}(x)\psi(x)\phi(x) \tag{11.71}$$

ϕ, ψ はそれぞれ実スカラー場, スピノル場で, 相互作用のないときにはそれぞれが自由場ラグランジアン密度(3.4)および(4.20)によって記述される.

b_e 本のボゾン外線と f_e 本のフェルミオン外線を持つグラフの見かけの発散次数を求めよ. そして基本発散結節部分が形成されるのは, 以下の場合だけであることを示せ.

$$(b_e, f_e) = (2,0),\ (0,2),\ (1,2),\ (3,0),\ (4,0)$$

注意：初めの3つの発散はQEDのそれと類似のものであり，式(11.71)における裸の質量と結合への繰り込みに寄与する．後の2つの発散は，式(11.71)への，

$$g_s\frac{\phi(x)^3}{3!}+\lambda\frac{\phi(x)^4}{4!}$$

という付加項における裸の結合 g_s と λ に対する繰り込みを生じる．この付加項は，繰り込まれた理論を得るために必然的に加えなければならないものである．一般に，繰り込み可能な理論においては，相互作用から生じる各発散定数に対して，ラグランジアンにはそれぞれに対応する項が存在し，それによって有限の，観測可能な (すなわち繰り込まれた) 質量もしくは結合が生じ得る形になっている必要がある．

第 12 章　場の理論の方法

ここからの4つの章では，QCDと，これを理解するために必要となるいくつかの技法について論じる．ここで取り上げる概念は，第16-19章において扱う電弱理論の議論では不要なので，そちらを優先したい読者は直接，第16章へ進めばよい．

QCDは多くの面でQEDと似ているが，重要な相違点もある．それはグルーオン場のゲージ変換(11.26b)がより複雑であることに起因している．このためグルーオン場の量子化は，電磁場の量子化よりも挑戦的な課題であり，ここまで我々が採用してきた正準形式によってこれを達成するには多大な困難が伴う[1]．

我々は正準量子化の代わりに，非Abel(アーベル)ゲージ理論の議論に適したFeynmanの径路積分による定式化を採用することにする．次章において径路積分を導入し，QCDに対してこれを適用する．しかしその前に，新たな概念——すなわちGreen関数と生成汎関数——を導入しておく．これらはQCDの理論展開において中心的な役割を担うことになる．

12.1　Green関数

任意の場の量子論による物理的な予言は，そのS行列要素に含まれている．S行列要素の絶対値の自乗は，物理的な過程が起こり得る確率を与える．摂動論の応用として，S行列要素の直接的な評価はもちろん有効である．しかしここではS行列と密接な関係を持つGreen関数と呼ばれる関数を集中的に論じることにする．これにはいくつかの重要な利点がある．Green関数はS行列要素ほど観測可能量と直接的な関係を持つわけではないが，計算しやすく，そこからS行列要素を導くことも容易である．その上，いくつかの異なる過程のS行列要素を単一のGreen関数から導くことも可能であり，そのような諸過程の関係を考察できるようになる．このような理由から，低次の摂動論よりも進んだ場の量子論の議論は，ほとんどがGreen関数を用いた形

---

[1]QCDのような非Abelゲージ理論に対して正準形式を適用するための系統的な方法は，次の文献に与えられている．T. Kugo(九後) and I. Ojima(小嶋), *Prog. Theor. Phys.* **60** (1978) 1869; *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **66** (1979) 1.（以下訳註）日本語の文献：九後汰一郎『ゲージ場の量子論 I』培風館 (1989), 第5章.

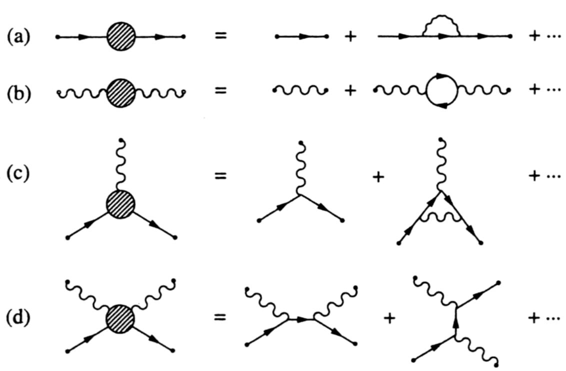


図12.1　QEDにおけるGreen関数の例と，その摂動展開における最初の部分．

式に立脚したものになる．本節ではQEDの文脈において様々な種類のGreen関数を導入し，続く12.2節と12.3節において，その性質を調べる．

QEDにおけるS行列要素は，始状態と終状態に存在する粒子(電子, 陽電子, 光子)に対応する外線を含む．これに相当するGreen関数では，各外線の部分がそれぞれ伝播関数に置き換わる．これらの部分は"脚(あし)"(leg)と呼ばれる．QEDにおける最も簡単な4種類のGreen関数を，その摂動展開の最初の部分とともに，ダイヤグラムの形で図12.1に示す．見て分かるように，上の2つは衣をまとった伝播関数，すなわち裸のフェルミオン伝播関数およびボゾン伝播関数それぞれに，すべての可能な自己エネルギーの修正を施した関数を合わせた総和を表している．

数式的なGreen関数の定義は，Heisenberg描像による複数の場の演算子の時間順序化積の真空期待値として与えられる[2]．一般的な形は次のように表される．

$$G^{\mu\cdots}(x,y,z,\ldots) \equiv {}_{\rm H}\langle 0|{\rm T}\{A^{\mu{\rm H}}(x)\ldots\psi^{\rm H}(y)\ldots\bar{\psi}^{\rm H}(z)\ldots\}|0\rangle_{\rm H} \tag{12.1}$$

それぞれの光子の脚(あし)に対して電磁場演算子 $A^{\mu{\rm H}}$ が，それぞれの外向きの電子の脚(あし)に対して電子場演算子 $\psi^{\rm H}$ が，それぞれの内向きの電子の脚(あし)に対して電子場演算子 $\bar{\psi}^{\rm H}$ があてがわれている．式(12.1)におけるすべての量は，添字Hを明示した通りHeisenberg描像(H.P.)で表されている．$|0\rangle_{\rm H}$ はH.P.で表した真空状態，すなわち相互作用をしている場を表す全ハミルトニアン H の正確な基底状態にあたる，時間に依存しない状態である．たとえば図12.1(d)に対応するGreen関数は，

[2] Heisenberg描像(H.P.)，相互作用描像(I.P.)，Schrödinger描像(S.P.)の関係は，1.5節で論じてある．

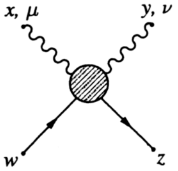


図12.2 Green関数(12.2)を表すダイヤグラム.

$$G^{\mu\nu}(x,y,z,\omega) = {}_{\mathrm{H}}\langle 0|\mathrm{T}\{A^{\mu\mathrm{H}}(x)A^{\nu\mathrm{H}}(y)\psi^{\mathrm{H}}(z)\bar{\psi}^{\mathrm{H}}(\omega)\}|0\rangle_{\mathrm{H}} \tag{12.2}$$

と表される．これをLorentz添字 μ, ν と時空座標 x, y, z, ω を明示したダイヤグラムの形で図12.2に示す.

これまでと同様に，我々は主に相互作用描像(I.P.)を利用してゆく．したがって，まずはGreen関数(12.1)をI.P.の状態と演算子によって表現してみよう．式を見やすくするために，式(12.1)の代わりに２つの場のGreen関数,

$$G(x,y) = {}_{\mathrm{H}}\langle 0|\mathrm{T}\{A^{\mathrm{H}}(x)B^{\mathrm{H}}(y)\}|0\rangle_{\mathrm{H}} \tag{12.3}$$

を考察する．A^{H} と B^{H} は，H.P.で表現されている任意の２つの場の演算子である．３つ以上の場を用いたGreen関数への一般化の方法も，これから示す２つの場のGreen関数に対する方法を見れば自ずと明らかになる.

我々は1.5節においてH.P.とI.P.の関係を導いた．I.P.で表した量に添字Iを付けることにすると，式(1.90)-(1.92)により,

$$A^{\mathrm{H}}(x) = U^{\dagger}(x_0)A^{\mathrm{I}}(x)U(x_0) \tag{12.4a}$$

であり，$B^{\mathrm{H}}(y)$ についても同様の関係式が成り立つ．状態ベクトルについては,

$$|0\rangle_{\mathrm{H}} = |0,t_0\rangle_{\mathrm{I}} \tag{12.4b}$$

である．両者の描像を関係づけるユニタリー演算子は,

$$U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0(t-t_0)-\mathrm{i}H(t-t_0)} \tag{12.4c}$$

と与えられる．t_0 は任意に設定された時刻である．議論の見通しをよくするために，ここでは仮に $x_0 > y_0$ としておく．式(12.4a)と式(12.4b)を式(12.3)に代入すると，I.P.で表したGreen関数の式が得られる.

$$G(x,y) = {}_{\mathrm{I}}\langle 0,t_0|U^{\dagger}(x_0)A^{\mathrm{I}}(x)U(x_0)U^{\dagger}(y_0)B^{\mathrm{I}}(y)U(y_0)|0,t_0\rangle_{\mathrm{I}} \tag{12.5}$$

この式を書き直してみる．1.5節の式(1.93)-(1.95)から，我々はI.P.の状態の時間発展を得ている．

$$|\mathrm{A}, t_1\rangle_\mathrm{I} = U(t_1, t_2)|\mathrm{A}, t_2\rangle_\mathrm{I} \tag{12.4d}$$

ユニタリー演算子 $U(t_1, t_2)$ は，

$$U(t_1, t_2) = U(t_1)U^\dagger(t_2) \tag{12.4e}$$

と定義され，次の性質を持つ．

$$U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3) \tag{12.4f}$$

式(12.4e)を利用して，式(12.5)における $U(x_0)U^\dagger(y_0)$ を $U(x_0, y_0)$ に置き換えると，次式になる．

$$G(x, y) = {}_\mathrm{I}\langle 0, t_0|U^\dagger(x_0)\, A^\mathrm{I}(x)\, U(x_0, y_0)\, B^\mathrm{I}(y)\, U(y_0)|0, t_0\rangle_\mathrm{I} \tag{12.6a}$$

$U(t)$ のユニタリー性により，次式が成り立つ．

$$|0, t_0\rangle_\mathrm{I} = U^\dagger(-\infty)U(-\infty)|0, t_0\rangle_\mathrm{I}, \qquad {}_\mathrm{I}\langle 0, t_0| = {}_\mathrm{I}\langle 0, t_0|U^\dagger(\infty)U(\infty)$$

これらを式(12.6a)に代入して，再び式(12.4e)を用いると，次式が得られる．

$$G(x, y) = {}_\mathrm{I}\langle 0, t_0|U^\dagger(\infty)\Big\{U(\infty, x_0)\, A^\dagger(x)\, U(x_0, y_0)\, B^\mathrm{I}(y)\, U(y_0, -\infty)\Big\}U(-\infty)|0, t_0\rangle_\mathrm{I} \tag{12.6b}$$

この式を，次のように書き直すことができる．

$$G(x, y) = {}_\mathrm{I}\langle 0, t_0|U^\dagger(\infty)\,\mathrm{T}\Big\{U(\infty, -\infty)\, A^\mathrm{I}(x)\, B^\mathrm{I}(y)\Big\}U(-\infty)|0, t_0\rangle_\mathrm{I} \tag{12.6c}$$

ここでは，式(12.4f)に従って，$U(\infty, -\infty)$ を，

$$U(\infty, -\infty) = U(\infty, x_0)U(x_0, y_0)U(y_0, -\infty)$$

のように分解することができ，時間順序化積によって，分解された各因子が正しい時間順序にしたがう形で，式(12.6b)のように配置される．式(12.6c)は時間順序化積を導入したことによって，演算子 A, B の時間順序如何にかかわらず妥当する式になっている．

式(12.4d)はI.P.の状態ベクトル $|\mathrm{A}, t\rangle_\mathrm{I}$ の時間発展を与える．これにより，

$$|\mathrm{A},\infty\rangle_{\mathrm{I}} = U(\infty,-\infty)\,|\mathrm{A},-\infty\rangle_{\mathrm{I}} \tag{12.4g}$$

となるが，この式をS演算子の定義式(6.16)と比べると，直ちに，

$$S = U(\infty,-\infty) \tag{12.4h}$$

と同定される．S演算子の具体的な形は式(6.22)によって与えられる．したがって，式(12.6c)を次のように書ける．

$$G(x,y) = {}_{\mathrm{I}}\langle 0,t_0|U^{\dagger}(\infty)\,\mathrm{T}\{S\,A^{\mathrm{I}}(x)\,B^{\mathrm{I}}(y)\}\,U(-\infty)\,|0,t_0\rangle_{\mathrm{I}} \tag{12.6d}$$

この式(12.6d)が，元々のGreen関数の式(12.3)を相互作用描像へと移行させた式にあたる．次節において我々は，第7章におけるS行列要素の解析と同様に，上のGreen関数の式に対してFeynmanダイヤグラムによる解釈を与える予定である．しかしその前に，式(12.6d)を，もう少し修正する必要がある．式(12.4d), (12.4e)および$U(t_0)=1$により，

$$|0,\pm\infty\rangle_{\mathrm{I}} = U(\pm\infty,t_0)\,|0,t_0\rangle_{\mathrm{I}} = U(\pm\infty)\,|0,t_0\rangle_{\mathrm{I}}$$

なので，Green関数は，

$$G(x,y) = {}_{\mathrm{I}}\langle 0,\infty|\,\mathrm{T}\{S\,A^{\mathrm{I}}(x)\,B^{\mathrm{I}}(y)\}|0,-\infty\rangle_{\mathrm{I}} \tag{12.6e}$$

となる．ここで6.2節の末尾で論じた断熱仮説を採用すると，状態ベクトル$|0,\pm\infty\rangle_{\mathrm{I}}$は相互作用のない理論における真空状態(基底状態)に一致する．この状態が縮退しておらず一意的に決まるものと仮定すると，始状態と終状態の違いは，位相因子だけになるはずである．

$$|0,\infty\rangle_{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}|0,-\infty\rangle_{\mathrm{I}} \tag{12.4i}$$

よって式(12.4g)と式(12.4h)から，次式を得る．

$${}_{\mathrm{I}}\langle 0,-\infty|\,S\,|0,-\infty\rangle_{\mathrm{I}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \tag{12.4j}$$

上の2本の式を用いると，式(12.6e)は次のように書き直される．

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\,{}_{\mathrm{I}}\langle 0,-\infty|\,\mathrm{T}\{S\,A^{\mathrm{I}}(x)\,B^{\mathrm{I}}(y)\}|0,-\infty\rangle_{\mathrm{I}} \\ &= \frac{{}_{\mathrm{I}}\langle 0,-\infty|\,\mathrm{T}\,\{S\,A^{\mathrm{I}}(x)\,B^{\mathrm{I}}(y)\}|0,-\infty\rangle_{\mathrm{I}}}{{}_{\mathrm{I}}\langle 0,-\infty|\,S\,|0,-\infty\rangle_{\mathrm{I}}} \end{aligned} \tag{12.6f}$$

これ以降，我々は主として相互作用描像を採用するので，式の記述を簡単にするために演算子から添字Iを省き，$|0,-\infty\rangle_{\mathrm{I}}$を$|0\rangle$と書くことにする．

$$|0\rangle \equiv |0, -\infty\rangle_{\mathrm{I}} \tag{12.7}$$

Heisenberg描像を用いる場合には，それを表す添字Hを付ける．

2つの場の演算子に関するGreen関数(12.6f)を見れば，演算子が3つ以上の場合への一般化の方法も明白である．式(12.1)を相互作用描像に移行させると，

$$G^{\mu\cdots}(x,\ldots,y,\ldots,z,\ldots) = \frac{\langle 0|\mathrm{T}\{S\,A^{\mu}(x)\ldots\psi(y)\ldots\bar{\psi}(z)\ldots\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \tag{12.8}$$

となる．上述のように，ここではすべての量が相互作用描像で表されているものと見なす．

4元運動量空間におけるGreen関数は，ここまで考察した時空間Green関数のFourier変換によって定義される．式(12.2)および図12.2 (p.295)のGreen関数に対応する運動量空間のGreen関数は，次式によって与えられる．

$$\begin{aligned}&(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2+p_1+p_2)G^{\mu\nu}(k_1,k_2,p_1,p_2)\\&\quad\equiv\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\mathrm{d}^4z\,\mathrm{d}^4\omega\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_1z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_2\omega}G^{\mu\nu}(x,y,z,\omega)\end{aligned} \tag{12.9}$$

運動量空間における一般のGreen関数は，次式で定義される．

$$\begin{aligned}&(2\pi)^4\delta^{(4)}(q_1+q_2+\cdots+q_n)G^{\mu\cdots}(q_1,q_2,\ldots,q_n)\\&\quad\equiv\int \mathrm{d}^4x_1\,\mathrm{d}^4x_2\ldots\mathrm{d}^4x_n\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_ix_i}\right)G^{\mu\cdots}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\end{aligned} \tag{12.10}$$

慣例に従って運動量変数を内向きに取る．後からGreen関数を特定の反応過程に関するS行列要素を関係づけるときに，何本かの脚(あし)が始状態に存在する粒子に，他の何本かの脚(あし)が終状態に存在する粒子に対応することを見る予定である．内向きの4元運動量pを持つ脚(あし)が，始状態に存在する粒子を表すのであれば，その粒子の4元運動量はpであり，終状態に存在する粒子を表すのであれば，その粒子の運動量は$-p$である．

式(12.10)における$x_1,\ldots,x_n$に関する積分は，δ関数$\delta^{(4)}(q_1+\cdots+q_n)$を生じるが，上式ではあらかじめ，これを別に考慮した形で運動量空間におけるGreen関数を定義している．このδ関数はエネルギー-運動量保存を保証し，Green関数の引数$q_1,\ldots,q_n$がこの保存則を満たすことを意味している．(7.2.1節では, 極めて簡単なS行列要素の場合について, 同様の議論を展開した．)

運動量空間におけるGreen関数の定義の仕方(12.9)や(12.10)は，Heisenberg描像へと移行しても共通である．

12.2 Feynmanダイヤグラムと Feynman規則

S行列展開(11.40)をGreen関数の式(12.8)に代入して，Green関数の展開式を得ることにより，摂動論による評価が可能となる．Green関数の展開項は，S行列展開の場合と同様に，図12.1 (p.294)のFeynmanダイヤグラムよって簡便に表現される．適用するFeynman規則は共通である．

本節ではGreen関数の摂動展開の例をいくつか調べて，Green関数の重要な性質を導く．議論の内容は第6章と第7章においてS行列に関して行った内容とほとんど違わないので，ここでは徹底した議論ではなく簡単な概説だけを行う．

12.2.1 摂動展開

まず，S行列展開の式(11.40)を相互作用描像のGreen関数の式(12.8)に代入することによって得られる一般的な結果をいくつか見てみよう．式(12.8)の分母は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\langle 0|S|0\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}\langle 0|S^{(n)}|0\rangle \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int\cdots\int \mathrm{d}^4x_1\ldots\mathrm{d}^4x_n\langle 0|\mathrm{T}\{\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_1)\ldots\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_n)\}|0\rangle \end{aligned} \tag{12.11}$$

但し，ここで，

$$\mathcal{L}_\mathrm{I}(x) = e\mathrm{N}\big(\bar{\psi}(x)\not{A}(x)\psi(x)\big) \tag{12.12}$$

である．6.2節において論じたように，$\mathcal{L}_\mathrm{I}$は正規積の形で定義される．一方，分子の展開式は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}\{SAB\ldots\}|0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\langle 0|\mathrm{T}\{AB\ldots S^{(n)}\}|0\rangle \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}e)^n}{n!}\int\cdots\int \mathrm{d}^4x_1\ldots\mathrm{d}^4x_n\langle 0|\mathrm{T}\{AB\ldots\mathrm{N}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1}\ldots\mathrm{N}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_n}\}|0\rangle\end{aligned} \tag{12.13}$$

ここで$AB\ldots$は，今，考察の対象とするGreen関数(12.8)の分子において用いられている，次のようなQED場の積を表す．

$$AB\ldots \equiv A^\mu(x)\ldots\psi(y)\ldots\bar{\psi}(z)\ldots \tag{12.14}$$

次に，展開式(12.11)と(12.13)における様々な項を，Wickの定理を用いて評価する．これらは真空期待値の評価になるので，正規化した演算子積の期待値が必ずゼロになるという性質，

$$\langle 0|\mathrm{N}(AB\ldots)|0\rangle = 0 \tag{12.15}$$

によってWick展開は簡単になる．すなわちWickの定理を適用すると，次のように縮約だけが残る形になる．

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}(ABCD\ldots WXYZ)|0\rangle\\ &\quad = ABCD\cdots WXYZ + ABCD\cdots WXYZ + \ldots\end{aligned} \tag{12.16a}$$

展開式に残る項は，場の演算子積 $ABC\ldots$ に含まれていた演算子すべてが別の何れかの演算子と対になってゼロでない縮約を形成している項である．これと同じ結果が次の形の期待値の展開にも適用される．

$$\begin{aligned}&\langle 0|\mathrm{T}\Big\{AB\ldots\mathrm{N}(\bar{\psi}A\!\!\!/\psi)_{x_1}\ldots\mathrm{N}(\bar{\psi}A\!\!\!/\psi)_{x_n}\Big\}|0\rangle\\ &\quad = \langle 0|\mathrm{T}\Big\{AB\ldots(\bar{\psi}A\!\!\!/\psi)_{x_1}\ldots(\bar{\psi}A\!\!\!/\psi)_{x_n}\Big\}|0\rangle_{\text{no. e.t.c.}}\end{aligned} \tag{12.16b}$$

但し，同時刻縮約(e.t.c.)は省かれる(式(6.38)参照)．

これらの結果を用いて特定のGreen関数を評価する前に，詳しい計算をせずに得ることのできる有用な結果をいくつか示してみる．

QEDにおいて，ゼロにならない縮約は伝播関数(6.32c)と(6.32d)だけである．

$$\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) = -\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1) = \mathrm{i}S_{\mathrm{F}\alpha\beta}(x_1-x_2) \tag{12.17a}$$

$$A^\mu(x_1)A^\nu(x_2) = A^\nu(x_2)A^\mu(x_1) = \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x_1-x_2) \tag{12.17b}$$

したがって式(12.16)により，演算子積(12.14)がフェルミオン場 ψ と反フェルミオン場 $\bar{\psi}$ を，ちょうど同数だけ含んでいない場合，式(12.13)のすべての項はゼロになる．このことは，Green関数(12.1), (12.8)において，入る電子の脚($\bar{\psi}$に対応する)と出る電子の脚(ψに対応する)が同じ本数でなければゼロになることを意味している．この結果は電子数(7.53a)の保存を具現化している．つまり図12.3の(a)と(b)のようなグラフに対応するGreen関数はゼロになる．

図12.3の(c)と(d)のように，奇数本の光子の脚を持ち，フェルミオンの脚を持たないGreen関数もゼロになる．これは9.1節の末尾において言及したFurryの定理そのものである．この定理はQEDが荷電共役変換，すなわち粒子と反粒子を入れ換

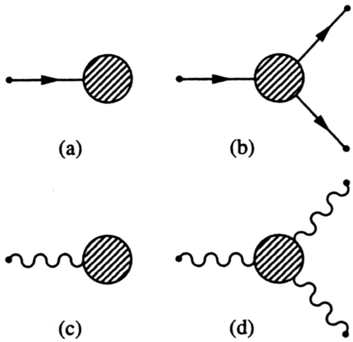


図12.3 QEDにおいてゼロになるGreen関数の例．(a)(b)は電子数保存に抵触する．(c)(d)はFurryの定理によってゼロになる．

える変換の下で不変である性質から導かれる．荷電共役変換を表すユニタリー演算子 C は，真空状態を不変に保ち，電磁場の符号を変える．Heisenberg描像を用いると，

$$C|0\rangle_{\mathrm{H}} = |0\rangle_{\mathrm{H}} \qquad C A^{\mu\mathrm{H}}(x) C^{-1} = -A^{\mu\mathrm{H}}(x)$$

となるが，これについては問題3.5と問題5.4で既に見ている[3]．したがって定義式(12.1)から，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&G^{\mu\nu\cdots}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&= {}_{\mathrm{H}}\langle 0|\mathrm{T}\left\{A^{\mu\mathrm{H}}(x_1) A^{\nu\mathrm{H}}(x_2) \ldots A^{\rho\mathrm{H}}(x_n)\right\}|0\rangle_{\mathrm{H}} \\
&= {}_{\mathrm{H}}\langle 0|C^{-1} C\,\mathrm{T}\left\{A^{\mu\mathrm{H}}(x_1) A^{\nu\mathrm{H}}(x_2) \ldots A^{\rho\mathrm{H}}(x_n)\right\}C^{-1} C|0\rangle_{\mathrm{H}} \\
&= (-1)^n\,{}_{\mathrm{H}}\langle 0|\mathrm{T}\left\{A^{\mu\mathrm{H}}(x_1) A^{\nu\mathrm{H}}(x_2) \ldots A^{\rho\mathrm{H}}(x_n)\right\}|0\rangle_{\mathrm{H}} \\
&= (-1)^n G^{\mu\nu\cdots}(x_1, x_2, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

上の結果は，n が奇数ならば Green関数は必ずゼロになることを意味している．

12.2.2 真空の振幅

個別の Green関数を計算する前に，すべての Green関数(12.8)の分母に共通して現れるS行列の真空期待値を評価しておく．式(12.12)を式(12.11)に代入すると，

[3] C-不変性の簡単な説明は，たとえば B. R. Martin and G. Shaw, *Particle Physics*, 3rd edn, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2008, Section 5.4 を参照．

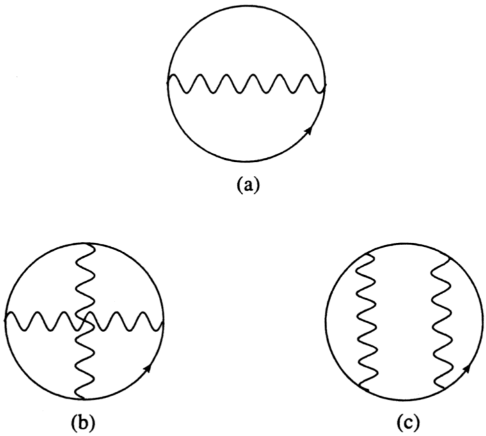


図12.4　(a)最も単純な真空ダイヤグラム，(b)(c)高次の真空ダイヤグラム．

$$\langle 0|S|0\rangle = 1 + \langle 0|S^{(2)}|0\rangle + \ldots \tag{12.18}$$

となる．何故なら，式(12.15)により，

$$\langle 0|S^{(1)}|0\rangle = \mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x_1 \langle 0|\mathrm{N}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1}|0\rangle = 0$$

だからである．自明でない最初の項は，Wickの定理 (式(12.16a)) により，

$$\begin{aligned}\langle 0|S^{(2)}|0\rangle &= \frac{(\mathrm{i}e)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 \langle 0|\mathrm{T}\{\mathrm{N}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_1}\mathrm{N}(\bar{\psi}\not{A}\psi)_{x_2}\}|0\rangle \\ &= -\frac{e^2}{2}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\, \bar{\psi}(x_1)\gamma^{\mu}A_{\mu}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^{\nu}A_{\nu}(x_2)\psi(x_2)\end{aligned} \tag{12.19}$$

である．この項は式(7.5f)と同じものであり，図12.4(a)の真空ダイヤグラムで表される．式(12.18)の高次の項は，高次の真空ダイヤグラムに対応するが，その例は図12.4の(b)や(c)のようになる．我々は真空ダイヤグラムについて，これ以上の立ち入った考察は行わない．この後に示すように，Green関数を評価する際に，真空からの寄与は，ここで示した分母からの部分と，分子の一部として生じる部分が相殺し合って，その詳細は結果に影響しないからである．

12.2.3 光子の伝播関数

次に，光子の伝播関数を考察する．これは２点Green関数として与えられる．

$$G^{\mu\nu}(x,y)=\frac{\langle 0|\mathrm{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \tag{12.20}$$

S行列展開のゼロ次だけを考えるなら $S=S^{(0)}=1$ であり，式(12.20)は自由な光子の伝播関数(5.26)に帰着する．高次の項を考えると，自己エネルギー部分の挿入による寄与も含まれる形で全伝播関数が形成される．これを以下に見てみる．

式(12.20)の右辺の分子を F と置き，そのS行列展開を考えてみよう．

$$F\equiv\langle 0|\mathrm{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)S\}|0\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}F^{(n)} \tag{12.21a}$$

$$F^{(n)}\equiv\langle 0|\mathrm{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)S^{(n)}\}|0\rangle \tag{12.21b}$$

式(12.13)を用いると，まず，

$$F^{(0)}=\langle 0|\mathrm{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle=\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \tag{12.22}$$

である．１次の項はゼロになる．

$$F^{(1)}=\mathrm{i}e\int\mathrm{d}^4x_1\langle 0|\mathrm{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)\,\mathrm{N}(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_1}\}|0\rangle=0 \tag{12.23}$$

これは奇数個の電磁場演算子を含むからである．次に，２次の項，

$$F^{(2)}=\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|\mathrm{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)\,\mathrm{N}(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_1}\mathrm{N}(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_2}\}|0\rangle$$

に対して Wickの定理を適用すると，次のようになる．

$$F^{(2)}=F_{\mathrm{a}}^{(2)}+F_{\mathrm{b}}^{(2)} \tag{12.24}$$

$$F_{\mathrm{a}}^{(2)}=\frac{(\mathrm{i}e)^2}{2}\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\,A^\mu(x)\,A^\nu(y)\,(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_1}(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_2} \tag{12.25a}$$

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{b}}^{(2)}=&\frac{(\mathrm{i}e)^2}{2}\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\,A^\mu(x)\,(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_1}(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_2}A^\nu(y)\\&+\frac{(\mathrm{i}e)^2}{2}\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\,A^\nu(y)\,(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_1}(\bar\psi\not{A}\psi)_{x_2}A^\mu(x)\end{aligned} \tag{12.25b}$$

式(12.25a)と式(12.19)を比較すると，即座に次の関係を得る．

$$F_{\mathrm{a}}^{(2)}=\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)\,\langle 0|S^{(2)}|0\rangle \tag{12.26}$$

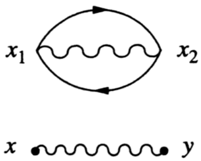


図12.5　式(12.26)に対応する非連結ダイヤグラム.

これは図12.5に示すような非連結ダイヤグラムに対応する．式(12.25b)の２つの項は，互いに積分変数 x_1 と x_2 が入れ替わっているだけの違いしかなく，同じ量を表している．この項の評価方法は，光子の自己エネルギー部分(式(7.21)と式(7.22))の評価とほとんど同じであり，結果は次のようになる．

$$F_{\mathrm{b}}^{(2)} = \int \mathrm{d}^4 x_1 \mathrm{d}^4 x_2\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\alpha}(x - x_1)(-1) \times \mathrm{Tr}\Big\{(\mathrm{i}e\gamma_\alpha)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_1 - x_2)(\mathrm{i}e\gamma_\beta)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_2 - x_1)\Big\}\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\beta\nu}(x_2 - y) \tag{12.27}$$

以上でGreen関数(12.20)を２次まで計算するための材料は揃った．式(12.21a)の $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ に上記の各式を代入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathrm{T}\Big\{A^\mu(x)A^\nu(y)S\Big\}|0\rangle &= \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) + \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)\langle 0|S^{(2)}|0\rangle + F_{\mathrm{b}}^{(2)} + \ldots \\ &= \Big\{\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) + F_{\mathrm{b}}^{(2)} + \ldots\Big\}\Big[1 + \langle 0|S^{(2)}|0\rangle + \ldots\Big] \\ &= \Big\{\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) + F_{\mathrm{b}}^{(2)} + \ldots\Big\}\langle 0|S|0\rangle \end{aligned} \tag{12.28}$$

上式では，式(12.18)を用いた．したがって式(12.20)と式(12.28)から，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}(x,y) &= \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) \\ &\quad + \int \mathrm{d}^4 x_1 \mathrm{d}^4 x_2\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\alpha}(x - x_1)(-1) \\ &\quad \times \mathrm{Tr}\Big\{(\mathrm{i}e\gamma_\alpha)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_1 - x_2)(\mathrm{i}e\gamma_\beta)\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_2 - x_1)\Big\}\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\beta\nu}(x_2 - y) \end{aligned} \tag{12.29}$$

これは，図12.6のFeynmanグラフに対応する．

この計算は，図12.5に含まれている真空の寄与を表すダイヤグラムの部分が，２次までの計算において光子の伝播関数(12.20)に対して寄与を持たないことを示している．

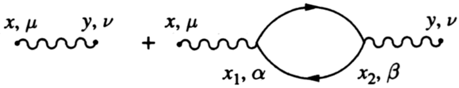


図12.6 2点Green関数(12.29)に対する低次項の2番目までの寄与.

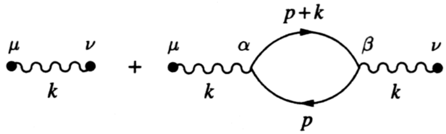


図12.7 運動量空間における Green関数(12.31)に対応する低次項の2番目までの寄与.

このような事情は Green関数のすべての摂動次数において一般に成立する．Green関数の式(12.8)の分子の摂動展開において現れる非連結の“真空気泡”(vacuum-bubble)のグラフは，必ず Green関数の分母の $\langle 0|S|0\rangle$ の展開から現れる同じグラフによって正確に相殺される．

Green関数が，S行列要素と同様に運動量空間における Feynman規則に従うことを証明して，本項を終えることにしよう．これを行うために，運動量空間における Green関数(式(12.10)参照)を計算する必要がある．

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(q_1+q_2)\,G^{\mu\nu}(q_1,q_2)=\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1x_1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2x_2}\,G^{\mu\nu}(x_1,x_2) \quad (12.30)$$

左辺の δ 関数は，x_1 と x_2 に関する積分から $q_1=-q_2\equiv k$ という関係，すなわちエネルギー-運動量保存の制約が生じることを意味する．式(12.29)を式(12.30)に代入し，x_1 と x_2 に関する積分を実行して式(7.23)を用いると，次の結果が得られる．

$$\begin{aligned}G^{\mu\nu}(k,-k)&=\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(k)\\&\quad+\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\alpha}(k)\,(2\pi)^{-4}\int \mathrm{d}^4p\,(-1)\,\mathrm{Tr}\left\{(\mathrm{i}e\gamma_\alpha)\,\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(p)\,(\mathrm{i}e\gamma_\beta)\,\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(p+k)\right\}\\&\quad\times\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\beta\nu}(k)+\ldots\end{aligned} \quad (12.31)$$

式(12.31)に対応する運動量空間の Feynmanグラフを図12.7に示す．この Green関数の引数が k と $-k$ になっているのは，図12.7において光子伝播関数の運動量を両方とも内向きに取った結果である．k が一方の光子伝播関数の内向きの4元運動量であるならば，エネルギー-運動量保存の要請により，もう一方の光子伝播関数の外

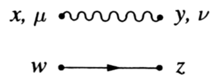


図12.8 Green関数(12.32)の最低次のグラフ.

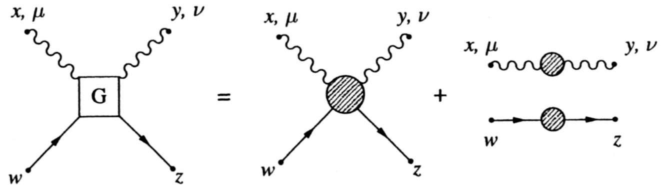


図12.9 Green関数(12.32)の連結部分と非連結部分への分解．丸い灰色の部分は連結ダイヤグラムの和を表す.

向きの4元運動量も $\boldsymbol{k}$ でなければならない．図12.7と式(12.31)の関係が，付録Bに示したFeynman規則1〜8に正確に整合していることを容易に確認できる.

12.2.4 連結Green関数

QEDにおいて，3本以上の脚を持つGreen関数の摂動展開からは，連結グラフと非連結グラフが両方とも現れる．このことを具体的に見てみるために，次の4点Green関数を考える.

$$G^{\mu\nu}(x,y,z,\omega) \equiv \frac{\langle 0|\mathrm{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)\,\psi(z)\,\bar{\psi}(\omega)\,S\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \tag{12.32}$$

これは図12.2 (p.295)のグラフに対応する．自由場の寄与に関しては $S=S^{(0)}=1$ と置くと，Wickの定理により次式を得る.

$$\begin{aligned} G^{(0)\mu\nu}(x,y,z,\omega) &\equiv \underbrace{A^\mu(x)A^\nu(y)}\,\underbrace{\psi(z)\,\bar{\psi}(\omega)} \\ &= \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y)\,\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(z-\omega) \end{aligned} \tag{12.33}$$

これは図12.8のダイヤグラムに対応する．一般的に言うと，Green関数(12.32)は図12.9に示すように連結ダイヤグラムと非連結ダイヤグラムに分解できる．ここでは他の可能性を省くために，図12.3 (p.301)の(a)と(c)のような1粒子Green関数が寄与を持たないことを利用した.

非連結ダイヤグラムは2つもしくはそれ以上の独立な過程に対応し，その構成要素となっている連結ダイヤグラムが持っている以上の情報は含んでいない．したがって

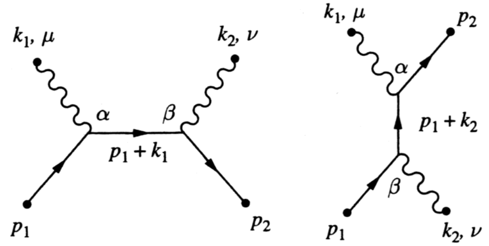


図12.10　2次の連結Green関数(12.35).“脚”に付してある4元運動量は，Green関数を扱う際の慣例に従って，すべて内向きと見なすことにする.

通常は，非連結過程からの寄与を除いた連結Green関数が，関心の対象となる[4)].

$$G_{\rm c}^{\mu\cdots}(x_1,\ldots) \equiv G^{\mu}(x_1,\ldots) - \sum [\text{非連結ダイヤグラム}] \tag{12.34}$$

式(12.32)に対応する連結Green関数 $G_{\rm c}^{\mu\nu}(x,y,z,\omega)$ を2次まで計算し，さらにこれに対応する運動量空間の連結Green関数が，2次まででで次式となることを，読者各自の練習問題として確認してもらいたい.

$$\begin{aligned}
&G_{\rm c}^{\mu\nu}(k_1,k_2,p_1,p_2)\\
&= {\rm i}D_{\rm F}^{\nu\beta}(k_2)\,{\rm i}S_{\rm F}(-p_2)({\rm i}e\gamma_\beta)\,{\rm i}S_{\rm F}(p_1+k_1)({\rm i}e\gamma_\alpha)\,{\rm i}S_{\rm F}(p_1)\,{\rm i}D_{\rm F}^{\alpha\mu}(k_1)\\
&\quad + {\rm i}D_{\rm F}^{\mu\alpha}(k_1)\,{\rm i}S_{\rm F}(-p_2)({\rm i}e\gamma_\alpha)\,{\rm i}S_{\rm F}(p_1+k_2)({\rm i}e\gamma_\beta)\,{\rm i}S_{\rm F}(p_1)\,{\rm i}D_{\rm F}^{\beta\nu}(k_2)
\end{aligned} \tag{12.35}$$

この式は図12.10のFeynmanダイヤグラムと対応する．伝播関数 ${\rm i}S_{\rm F}(-p_2)$ における引数の負号は，伝播関数の引数が常にフェルミオン線の矢の向きに合致するのに対して(式(7.48)参照)，Green関数の脚(あし)の引数はすべて内向きを規準としているために，脚(あし)の向きが実際には逆転していることを示す．式(12.35)を，付録BのFeynman規則を利用して直接に導くことも可能である.

式(12.35)は運動量空間における2次の連結Green関数を与えている．このGreen関数は，一般的には次の形に書ける.

$$G_{\rm c}^{\mu\nu}(k_1,k_2,p_1,p_2) = {\rm i}D_{\rm F}^{\mu\alpha}(k_1)\,{\rm i}S_{\rm F}(-p_2)\,\Gamma_{\alpha\beta}(k_1,k_2,p_1,p_2)\,{\rm i}S_{\rm F}(p_1)\,{\rm i}D_{\rm F}^{\beta\nu}(k_2) \tag{12.36}$$

---

4) 形式的に示すならば，これは次のような関係式によって定義される.

$$G_{\rm c}^{\mu\nu}(x,y,z,\omega) \equiv G^{\mu\nu}(x,y,z,\omega) - G^{\mu\nu}(x,y)\,G(z,\omega)$$

上式は図12.9に対応する．図12.1 (p.294)の(b)と(a)のような2点Green関数に関しては，連結Green関数 $G_{\rm c}^{\mu\nu}(x,y)$, $G_{\rm c}(z,\omega)$ と全Green関数 $G^{\mu\nu}(x,y)$, $G(z,\omega)$ が同じである.

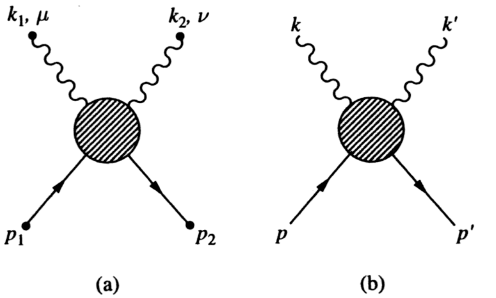


図12.11 (a) Green関数 $G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2)$ (式(12.36))．すべての運動量の向きの基準を内向きとする．(b) Compton散乱(12.38)に関するFeynman振幅．始状態粒子の運動量 p, k は内向きに，終状態粒子の運動量 p', k' は外向きに設定してある．

上式における4つの伝播関数因子は，図12.10のFeynmanダイヤグラムに見られるような4本の脚(あし)に対応する．$\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2)$ は"結節部分関数(ヴァーテックス)"(vertex function)の一例である．式(12.35)により，この結節部分関数(ヴァーテックス)は，2次までで，次のように表される．

$$\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2) = (\mathrm{i}e\gamma_\beta)\mathrm{i}S_\mathrm{F}(p_1 + k_1)(\mathrm{i}e\gamma_\alpha) + (\mathrm{i}e\gamma_\alpha)\mathrm{i}S_\mathrm{F}(p_1 + k_2)(\mathrm{i}e\gamma_\beta) \tag{12.37}$$

12.3　Green関数とFeynman振幅の関係

運動量空間のGreen関数(12.10)は，Feynman振幅 $\mathcal{M}$ を求める場合と同じFeynman規則に従う．したがって任意の過程に関して，関係する連結Green関数を考えて，脚(あし)の伝播関数を入射・出射する外線粒子の因子に適切に置き換えれば，Feynman振幅が得られるはずである．S行列要素自体は，そこから式(8.1)を通じて求まる．

実例をひとつ見ると明確に理解できる．Compton散乱過程を考えよう．

$$\gamma(k, r) + e^-(p, s) \;\to\; \gamma(k', r') + e^-(p', s') \tag{12.38}$$

Compton散乱に関するFeynman振幅は，連結Green関数 $G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2)$ から得られる．これを図12.11に示す．運動量変数の関係は，次のように同定される．

$$k_1 = k, \quad p_1 = p, \quad k_2 = -k', \quad p_2 = -p' \tag{12.39}$$

Green関数(12.36)の脚(あし)にあたる4つの伝播関数因子を，図12.11(b)のFeynmanグラフの外線に対応する入射粒子と出射粒子の因子に置き換える．式(12.39)と式(7.49)を見ると，最低次の摂動論における置き換えは次のように定まる．

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\alpha}(k_1)\to\varepsilon_r^{\alpha}(\mathbf{k}), & \mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(p_1)\to u_s(\mathbf{p}) \\ \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\beta\nu}(k_2)\to\varepsilon_{r'}^{\beta}(\mathbf{k}'), & \mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(-p_2)\to \bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \end{array}\right\} \tag{12.40a}$$

式(12.36)に上記の置き換えを施すと，Compton散乱のFeynman振幅の式が次のように表される．

$$\mathcal{M}(k,k',p,p')=\varepsilon_r^{\alpha}(\mathbf{k})\,\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}')\,\Gamma_{\alpha\beta}(k,-k',p,-p')\,u_s(\mathbf{p})\,\varepsilon_{r'}^{\beta}(\mathbf{k}') \tag{12.41}$$

右辺に含まれる結節部分(ヴァーテックス)関数 $\Gamma_{\alpha\beta}$ を2次の表式(12.37)に置き換え，式(12.39)を代入すると，Green関数から得たFeynman振幅(12.41)は，前に得ている式(7.38a), (7.38b)に帰着する．

最低次の摂動から，それより高次の摂動へ議論を進める際には，式(12.40a)をループダイヤグラムを考慮して修正する必要がある．質量殻上(オン・シェル)におけるフェルミオン伝播関数への自己エネルギーの挿入は，因子 Z_2 による補正効果をもたらし[5)]，同じ自己エネルギー部分をフェルミオン外線に挿入する場合の補正因子は $Z_2^{1/2}$ となる(式(9.45)参照)．光子に対しても同様の影響を考慮すると，式(12.40a)は次のように変更される．

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\alpha}(k_1)\to Z_3^{-1/2}\varepsilon_r^{\alpha}(\mathbf{k}), & \mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(p_1)\to Z_2^{-1/2}u_s(\mathbf{p}) \\ \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\beta\nu}(k_2)\to Z_3^{-1/2}\varepsilon_{r'}^{\beta}(\mathbf{k}'), & \mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(-p_2)\to Z_2^{-1/2}\bar{u}_{s'}(\mathbf{p}') \end{array}\right\} \tag{12.40b}$$

最低次の場合は $Z_3=Z_2=1$ である．Green関数の繰り込みについては，第15章で詳しく論じることにする．

12.3.1 交差関係

式(12.40)にしたがってGreen関数の脚(あし)にあたる伝播関数因子を入射・出射する粒子の因子に置き換えると，Compton散乱のFeynman振幅(12.41)が得られる．しかし，これらの伝播関数に対して，他の置き換えを考えることも可能である．したがって，単一のGreen関数から，いくつかの異なる過程に関するFeynman振幅が導かれることになる．たとえば以下に示す一連の反応の振幅は，すべて光子の脚(あし)とフェルミ

[5)] 式(9.104)参照．$e_0\to e$ の変換をするために式(9.103)で Z_2 を用いているが，それは $\Sigma_{\mathrm{c}}(p)=0$ 殻，すなわち質量殻 $\not{p}=m$ における措置である．15.2.1項を参照．

オンの脚(あし)を２本ずつ持つ４点Green関数(図12.11(a)参照)から推定することができる．あるいは等価的に，式(12.36)で定義される４点結節(ヴァーテックス)部分関数 $\Gamma_{\alpha\beta}(k_1, k_2, p_1, p_2)$ から導かれると言ってもよい．

$$\gamma + e^- \;\rightarrow\; \gamma + e^- \tag{12.42a}$$

$$\gamma + e^+ \;\rightarrow\; \gamma + e^+ \tag{12.42b}$$

$$\gamma + \gamma \;\rightarrow\; e^+ + e^- \tag{12.42c}$$

$$e^+ + e^- \;\rightarrow\; \gamma + \gamma \tag{12.42d}$$

式(12.42)に挙げた各反応は，始状態の粒子を終状態の反粒子に置き換えたり，その逆を施したりした相互関係を持つ．これを“交差関係”(crossing relation)と呼ぶ．ここでは式(12.42a)と式(12.42d)について考察し，式(12.42b)と式(12.42c)に関する考察は，読者の練習問題とする．

それでは，Compton散乱，

$$\gamma(k, r) + e^-(p, s) \;\rightarrow\; \gamma(k', r') + e^-(p', s') \tag{12.38}$$

と，電子-陽電子消滅，

$$e^+(p', s') + e^-(p, s) \;\rightarrow\; \gamma(k', r') + \gamma(k, r) \tag{12.43}$$

を比較してみよう．

Compton散乱(12.38)のFeynman振幅は式(12.41)によって与えられる．電子-陽電子消滅(12.43)に対応する振幅は，同じGreen関数 $G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2)$ から，図12.12に示す脚(あし)の置き換え措置によって得られる．運動量変数の対応関係は，ここでは次のようになる．

$$k_1 = -k, \quad k_2 = -k', \quad p_1 = p, \quad p_2 = p' \tag{12.44}$$

伝播関数因子を式(7.49)にしたがって，図12.12(b)に対応するように入射粒子や出射粒子の因子に置き換えると，反応(12.43)のFeynman振幅の適正な形として，次式を得る．

$$\mathcal{M}(p, p', k, k') = \varepsilon_r^{\alpha}(\mathbf{k})\,\bar{v}_{s'}(\mathbf{p}')\,\Gamma_{\alpha\beta}(-k, -k', p, p')\,u_s(\mathbf{p})\,\varepsilon_{r'}^{\beta}(\mathbf{k}') \tag{12.45}$$

反応(12.38)および(12.43)に関するFeynman振幅(12.41)と(12.45)を比べると，始状態(終状態)の粒子を，同じ運動量を持つ終状態(始状態)の粒子に置き換える際に，

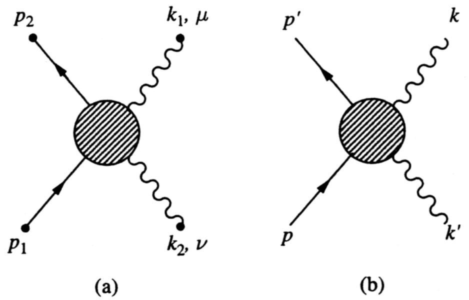


図12.12 (a) Green関数 $G_c^{\mu\nu}(k_1, k_2, p_1, p_2)$ (式(12.36)). すべての運動量変数が内向きに設定されている. (b)電子-陽電子対消滅過程(12.43)のFeynman振幅. 始状態粒子の運動量 p, p' は内向きに設定され, 終状態粒子の運動量 k, k' は外向きに設定される. Green関数において脚の順序と位置は重要ではないので, ここで用いるGreen関数は, 図12.11(a)で用いたものと同じである. それぞれの場合において, グラフは対応するFeynman振幅との関係を強調して, 慣例に従い, 始状態粒子が左, 終状態粒子が右になるように描かれる.

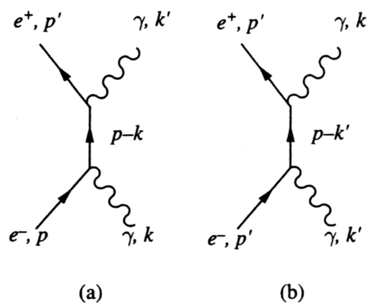


図12.13 電子-陽電子消滅散乱の2次のFeynman振幅(12.46)に対応するダイヤグラム.

結節部分因子(ヴァーテックス) $\Gamma_{\alpha\beta}$ の中の運動量の符号を逆転させる必要があることが分かる. これが先ほど言及した交差関係である.

最後に, 式(12.37)を式(12.45)に代入することにより, 2次の電子-陽電子消滅のFeynman振幅を得る. スピンと偏極の添字を省略すると, 次式になる.

$$\mathcal{M}(p, p', k, k') = -e^2 \bar{v}(\mathbf{p}') \not\epsilon(\mathbf{k}') \mathrm{i} S_F(p-k) \not\epsilon(\mathbf{k}) u(\mathbf{p}) - e^2 \bar{v}(\mathbf{p}') \not\epsilon(\mathbf{k}) \mathrm{i} S_F(p-k') \not\epsilon(\mathbf{k}') u(\mathbf{p}) \tag{12.46}$$

これが図12.13のダイヤグラムに対応する.

12.4　汎関数とGrassmann場

特定の場の理論におけるすべてのGreen関数を，ある単一の量から導くことができる．これを生成汎関数 (generating functional) と呼ぶ．任意の過程のS行列要素は，対応するGreen関数から得られるので，生成汎関数は，その理論の物理的な予言を完全に集約したものと見なされる．生成汎関数が一般的な結果を導くために有用であることを，次章において見る予定である.

生成汎関数を構築するには，汎関数微分とGrassmann（グラスマン）場に関する知識が必要である．関連する数学の簡単な入門を本節で与え，生成汎関数自体については次の12.5節で考察する.

12.4.1　汎関数

汎関数 (functional) は，関数を一般化した概念である．n 個の変数 x_i $(i = 1, \ldots, n)$ を引数として持つ関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は，$x_1, \ldots, x_n$ の値をすべて指定すると，決まった関数値を与える.

ここで離散的な変数一式 $x_1, \ldots, x_n$ を，連続的な無数の変数へと移行させることを考える．離散的な指標 i を，連続的な値を取る指標 x に置き換え，一連の変数値 $x_1, \ldots, x_n$ を関数 $\phi(x)$ に置き換える．つまり関数 $\phi(x)$ を各指標値 x における変数値を含んだ無限個の数値の集合体と見なす．ある汎関数を $F[\phi]$ と表記すると，これは関数 $\phi(x)$ を決めたときに，決まった値 $F = F[\phi]$ を与えるものである．簡単な汎関数の例としては,

$$F[\phi] = \int \mathrm{d}^4 x \, \phi(x) \tag{12.47}$$

がある[6)]．関数 $\phi(x)$ を決めると，この積分式は決まった値 $F[\phi]$ を与える．より一般的に，式(12.47)の被積分関数を $\phi(x)$ の関数と置き換えれば，また別の汎関数が規定される.

$$F[\phi] = \int \mathrm{d}^4 x \, f\{\phi(x)\} \tag{12.48}$$

6) 我々は一貫して時空座標変数を引数とする関数だけを対象とし，積分は全時空にわたるものとするが，他の場合にも同様の考察が成立することは，読者にとって自明のはずである.

更に，場の量子論ではしばしば次のような形の汎関数を扱う．

$$[AKB] \equiv \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y \, A(x) K(x,y) B(y) \tag{12.49}$$

積分核 $K(x,y)$ は既知の２変数関数であり，$[AKB]$ は２つの関数 $A(x)$ と $B(x)$ によって決まる汎関数である．この $[AKB]$ という省略記法は，さらに複雑な汎関数，たとえば $e^{\{\mathrm{i}[AKB]\}}$ のような汎関数を扱う際に便利となる．これは汎関数の関数 $f\{[AKB]\}$ の形で規定される汎関数の例にあたる．

汎関数が，ただ関数 ϕ に依存するだけでなく，それとは別に何らかのパラメーター x も含んでいて，関数と併せてそのパラメーター値を指定することで汎関数の値が定まるという場合もある．ひとつの例は，

$$G_x[\phi] = \int \mathrm{d}^4 y \, K(x,y) \phi(y) \tag{12.50}$$

である．$G_x[\phi]$ は，x の各値の下で“異なる” ϕ の汎関数を規定することになる．したがって ϕ を固定して考えれば，$G_x[\phi]$ を添字 x を引数とする関数と見ることもできる．

関心が持たれる特例として，式(12.50)において積分核 $K(x,y)$ に δ 関数 $\delta^{(4)}(x-y)$ を充てると，得られる汎関数は，

$$E_x[\phi] = \int \mathrm{d}^4 y \, \delta^{(4)}(x-y) \phi(y) = \phi(x) \tag{12.51}$$

となる．このように考えると関数 $\phi(x)$ を汎関数のように捉えることもできる．すなわち x を固定して見ると，“関数 $\phi(x)$ ”を変えることにより，固定した x において与えられる汎関数としての数値は変化する．これは通常 $\phi(x)$ を見るときに，関数が決まっていて，x を変数として変化させるという捉え方とは対照的である．

さらに一般的な汎関数の形を考えることもできる．たとえば関数の微分を含んだ形を考えてもよい．作用積分(2.11)は，この例にあたる．

我々は汎関数微分 (functional differentiation) を考察する段階に到達した．汎関数の微分は，関数の微分と類似した形で定義される．関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ において，各変数に無限小の変更 $\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n$ を施したとき，関数の値が $\mathrm{d}f$ 変化するものとする．微小量の１次までを考慮すると，次のように与えられる．

$$\mathrm{d}f = f(x_1 + \mathrm{d}x_1, \ldots, x_n + \mathrm{d}x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \tag{12.52}$$

同じ方法で，汎関数 $F[\phi]$ において，関数 $\phi(x)$ に無限小の変分を施して $\phi(x) + \delta\phi(x)$ とした場合の汎関数値への影響を考えよう．$\delta\phi(x)$ は x の微小な変更に伴う $\phi(x)$ の

変化ではなくて，それぞれの x の値において，同じ x の値の下で関数値に微小な仮想変化を与えることを意味する．汎関数の 1 次の変分は，次のように与えられる．

$$\delta F[\phi] = F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] = \int \mathrm{d}^4 x \, \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi[x]} \delta\phi(x) \tag{12.53}$$

この式が，汎関数微分 $\delta F[\phi]/\delta\phi(x)$ を定義する式になる．ここでも 1 次の微小量 $\delta\phi(x)$ だけを残した．通常の微分と同様に，最終的には $\delta\phi \to 0$ を想定する．式(12.53) は，式(12.52) に対比されるべき式である．$\mathrm{d}f$ が離散的な指標の付いた変数一式 x_i $(i = 1, \ldots, n)$ のそれぞれの変化によって f に生じる変化の和を表すのと同様に，$\delta F[\phi]$ は連続的な指標 x の付いた一連の "変数" $\phi(x)$ のそれぞれ (各部分) の変分に起因する変化を積分した量を表している．

式(12.53) を $\delta\phi(y)$ で割って，$\delta\phi \to 0$ の極限を考えると，次式が得られる．

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)} = \int \mathrm{d}^4 x \, \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} \tag{12.54}$$

$F[\phi]$ は任意の汎関数なので，上式と δ 関数の定義により，

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} = \delta^{(4)}(x - y) \tag{12.55}$$

となる．この関係は単に，$x \neq y$ のときには変分 $\delta\phi(x)$ と変分 $\delta\phi(y)$ が互いに独立であることを表している．これは式(12.52) が含意している各変数が独立であるという関係 $\partial x_i/\partial x_j = \delta_{ij}$ と類似のものである．

このような類似関係により，汎関数微分を通常の微分とよく似た方法で扱うことができる．たとえば式(12.48) の形の一般的な汎関数において，

$$F[\phi + \delta\phi] = \int \mathrm{d}^4 x \, f\{\phi(x) + \delta\phi(x)\} = \int \mathrm{d}^4 x \left[f\{\phi(x)\} + \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} \delta\phi(x) \right]$$

であり，式(12.53) と式(12.55) により，次式を得る．

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial f\{\phi(x)\}}{\partial\phi(x)} \tag{12.56a}$$

読者には練習問題として，以下の一般的な結果を導いてもらいたい．

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \big\{ aF[\phi] + bG[\phi] \big\} = a \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} + b \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)} \tag{12.56b}$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} F[\phi] G[\phi] = \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} G[\phi] + F[\phi] \frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)} \tag{12.56c}$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \big\{ f(F[\phi]) \big\} = \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\delta F}{\delta\phi(x)} \tag{12.56d}$$

式(12.50) の $G_x[\phi]$ のように，汎関数が別の変数に関する関数でもあるという形の汎関数も定義できるので，それを用いて汎関数の汎関数 $F = F[G_x[\phi]]$ というものも定義可能である．基本的な定義(12.53) にもとづき，この汎関数には次の連鎖律 (chain rule) が成立する．

$$\frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta\phi(z)} = \int d^4y \, \frac{\delta F[G_x[\phi]]}{\delta G_y[\phi]} \frac{\delta G_y[\phi]}{\delta\phi(z)} \tag{12.56e}$$

式(12.55) と式(12.56a)-(12.56e) は，式(12.48) の形で与えられる汎関数に適用できる一般的な関係であり，これらを利用することによって，いろいろな汎関数微分を簡単に評価できる．

12.4.2 Grassmann 代数と Grassmann 場

Grassmann（グラスマン）代数は 19 世紀に数学者 H. Grassmann によって発明され[7]，1960 年代に汎関数の方法をフェルミオン系へ拡張するために物理学に導入された．ここではその性質について必要最低限の説明を与える．詳細については Berezin の本を参照されたい[8]．

Grassmann 代数は抽象代数であり，その生成子 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ が次の反交換関係を持つものと仮定される．(これらの生成子を‘Grassmann 数’と称する．)

$$[\theta_i, \theta_j]_+ = 0 \tag{12.57}$$

添字 i と j は，$1, \ldots, n$ の中の任意の値を取れるものとする．式(12.57) から，即座に次の性質が与えられる．

$$\theta_i^2 = \theta_i\theta_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \tag{12.58}$$

この関係は Grassmann 代数の基本的な性質であり，代数の運用を簡単にする．生成子の積を考えよう．

$$\theta_{i_1}\theta_{i_2}\ldots\theta_{i_{k-1}}\theta_{i_k}\theta_{i_{k+1}}\ldots\theta_{i_\omega} \tag{12.59}$$

添字 $i_1, \ldots, i_\omega$ は，それぞれが $1, \ldots, n$ の中の任意の値を取ることができるものとする．これらの添字のうちのどれか 2 つが同じならば，反交換関係(12.57) を用いてそれらの生成子を隣接するように生成子積を変更し，そこに式(12.58) を適用するこ

[7] H. Grassmann, *Die Ausdehnungslehre von 1844*, Otto Wigand, Leipzig, 1878.
[8] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York and London, 1966.

とができる．よって，式(12.59)のような生成子積は，同じ添字を持つ生成子が２つ含まれているならば必ずゼロになる．したがって n 個の生成子の Grassmann 代数における最も一般的な代数要素 ($\theta_1, \ldots, \theta_n$ の‘関数’) の形は，次のように与えられる．

$$f(p) = p_0 + \sum p_i\theta_i + \sum p_{ij}\theta_i\theta_j + \cdots + p_{12\ldots n}\theta_1\theta_2\ldots\theta_n \tag{12.60}$$

ここで添字 $i, j, \ldots$ は，$i \leq j \leq \ldots$ という制約の下で，1 から n までの値を取り得るものとする．係数 $p_0, p_i, p_{ij}, \ldots$ は通常の数であるが，各生成子 θ_i はその操作上の規則によって規定される抽象的な対象である．式(12.60)の左辺における p という略記は，$p_0, p_i, p_{ij}, \ldots$ を意味する．

議論を簡単にするために，２つの生成子に立脚する代数 ($n = 2$) を考えよう．最も一般的な代数要素の形は，

$$f(p) = p_0 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 + p_{12}\theta_1\theta_2 \tag{12.61a}$$

である．これは反交換関係(12.57)を利用すると，次のようにも書ける．

$$f(p) = p_0 + p_1\theta_1 + p_2\theta_2 - p_{12}\theta_2\theta_1 \tag{12.61b}$$

すべての要素 $f(p)$ 全体を，ひとつの代数と呼ぶ．何故なら，もし $f(p)$ と，

$$f(q) = q_0 + q_1\theta_1 + q_2\theta_2 + q_{12}\theta_1\theta_2$$

という２つの異なる要素を考えるときに，両者の積を，その結果も代数要素となるように，

$$\begin{aligned} f(p)f(q) = p_0q_0 &+ (p_0q_1 + p_1q_0)\theta_1 + (p_0q_2 + p_2q_0)\theta_2 \\ &+ (p_0q_{12} + p_1q_2 - p_2q_1 + p_{12}q_0)\theta_1\theta_2 \end{aligned}$$

と“定義”することができ，この積演算には結合律も成立するからである[9]．代数の異なる要素 $f(p)$ と $f(q)$ は一般に，交換も反交換もしない．これらの結果を n 個の生成子の代数にも一般化できることは明らかである．

Grassmann 数 (Grassmann 生成子) は抽象的なもので，純粋にその操作上の性質だけから定義されている．それは通常の数ではないし，連続変数のようなものでもない．線形演算子 $\partial/\partial\theta_i$ を，次の性質によって定義する．

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial\theta_j} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n \tag{12.62}$$

[9] さらに $f(p)[f(q) + f(r)] = f(p)f(q) + f(p)f(r)$ も成り立つ．

$\partial/\partial\theta_i$ を通常の数や通常の関数に作用させた場合にはゼロになる．式(12.62) は，通常の変数に関する，

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

を想起させるので，$\partial/\partial\theta_i$ は θ_i に関する微分 (differentiation) と呼ばれる．しかし $\partial/\partial\theta_i$ はあくまで上述のように定義された象徴的な操作であることを強調しておく．通常の微分のような微小量同士の比に極限操作を施した結果とは全く別のものである．

微分の対象を生成子の積へ拡張する際には，反交換関係 (12.57) に注意が必要である．$n=2$ の場合，式(12.61a,b) により，

$$\frac{\partial f(p)}{\partial\theta_1} = p_1 + p_{12}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1\theta_2), \quad \frac{\partial f(p)}{\partial\theta_1} = p_1 - p_{12}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_2\theta_1)$$

となる．これらの２つの式は反交換関係により，互いに等しい．

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1\theta_2) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}(-\theta_2\theta_1) = -\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_2\theta_1)$$

この結果を利用して，生成子の積に対する微分を“定義”する．式(12.62) を併せて用いると，次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1\theta_2) = \frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_1}\theta_2 = \theta_2, \quad \frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_2\theta_1) = -\frac{\partial}{\partial\theta_1}(\theta_1\theta_2) = -\theta_2$$

すなわち生成子積の中の微分を施すべき生成子を，反交換関係を利用して生成子積の左端まで移行させてから，微分によってそれを除去するという操作が施される．

この結果を一般化するのは容易である．反交換関係 (12.57) により，

$$\theta_{i_1}\theta_{i_2}\ldots\theta_{i_{k-1}}\theta_{i_k}\theta_{i_{k+1}}\ldots\theta_{i_\omega} = (-1)^{k-1}\theta_{i_k}\{\theta_{i_1}\theta_{i_2}\ldots\theta_{i_{k-1}}\theta_{i_{k+1}}\ldots\theta_{i_\omega}\} \tag{12.63}$$

なので，線形演算子 $\partial/\partial\theta_i$ の一般的な定義は，次のように与えられる[10]．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\theta_i}\{\theta_{i_1}\theta_{i_2}\ldots\theta_{i_{k-1}}\theta_{i_k}\theta_{i_{k+1}}\ldots\theta_{i_\omega}\} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{\omega}(-1)^{k-1}\delta_{ii_k}\{\theta_{i_1}\theta_{i_2}\ldots\theta_{i_{k-1}}\theta_{i_{k+1}}\ldots\theta_{i_\omega}\} \\
&\quad = \delta_{ii_1}\{\theta_{i_2}\theta_{i_3}\ldots\theta_{i_\omega}\} - \delta_{ii_2}\{\theta_{i_1}\theta_{i_3}\ldots\theta_{i_\omega}\} + \ldots
\end{aligned} \tag{12.64}$$

[10] 厳密に言えば，これは“左からの微分”の定義である．すなわち“微分演算子”が作用を受ける演算子積の左側にある場合の微分を規定している．別途“右からの微分”も定義できるが，ここではそれを持ち出す必要はない．

式(12.64)において，連続する項の符号が順次変わるのは，生成子が反交換関係を持つことによる結果である．式(12.64)は見た目よりも単純である．式(12.64)の右辺においてゼロでない生成子積が現れるためには，添字 $i_1, \ldots, i_\omega$ がすべて違っていなければならない．これらがすべて違えば，どれかひとつだけゼロにならない項が残ることになり，2つ以上の項が残ることはあり得ない．最後に次のことを指摘しておく．生成子積の微分の定義(12.64)と，$\partial/\partial\theta_i$ がその定義から線形演算子であることを考え合わせると，次の反交換関係が得られる．

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right]_+ = 0, \qquad \left[\theta_i, \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right]_+ = \delta_{ij} \tag{12.65}$$

読者は，たとえば $n = 2$ の場合について，上式を容易に証明できるはずである．

次に，上述の結果を連続無限個の Grassmann 数に立脚した代数へと拡張する．生成子 $\theta(x)$ が，各時空点 x に付随して存在し，反交換関係，

$$[\theta(x), \theta(y)]_+ = 0 \tag{12.66}$$

を満たすものとする．無限個の生成子 $\theta(x)$ をまとめて Grassmann 場と呼ぶ．この場の“汎関数”を，次式によって定義することができる．

$$F[\theta] = f_0 + \int \mathrm{d}^4x\, f_1(x)\theta(x) + \iint \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, f_2(x,y)\theta(x)\theta(y) + \ldots \tag{12.67}$$

f_i は通常の関数である．この Grassmann 汎関数は，前項において式(12.47)や式(12.48)で定義した“通常の”汎関数 $F[\phi]$ の類似物である．しかし通常の汎関数では，関数 $\phi(x)$ を与えて，式(12.47)もしくは式(12.48)の時空積分を具体的に評価することが可能であった．式(12.67)のような Grassmann 汎関数については，$\theta(x)$ が通常の関数ではなくて Grassmann 場なので，そのような評価の手続きが不可能である．式(12.67)のような式は純粋に形式的な表式であり，その Grassmann 場の性質は，有限個の Grassmann 数 θ_i の場合と似た方法で定義されねばならない．

線形演算子 $\partial/\partial\theta_i$ の定義(12.64)からの類推で，Grassmann 場 $\theta(x)$ に関する汎関数微分を，次の性質を持つ線形演算子 $\delta/\delta\theta(x)$ として“定義”する．

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\theta(x)}\{\theta(x_1)\theta(x_2)\theta(x_3)\ldots\theta(x_n)\} \\
&\quad = \delta^{(4)}(x-x_1)\{\theta(x_2)\ldots\theta(x_n)\} - \delta^{(4)}(x-x_2)\{\theta(x_1)\theta(x_3)\ldots\theta(x_n)\} \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{n-1}\delta^{(4)}(x-x_n)\{\theta(x_1)\theta(x_2)\ldots\theta(x_{n-1})\}
\end{aligned} \tag{12.68}$$

この定義により，生成子数が有限の Grassmann 代数における式(12.62)と式(12.65)

に類似した関係が得られる．まず通常の汎関数微分に関わる式(12.55)と同様に，

$$\frac{\delta\theta(x)}{\delta\theta(y)} = \delta^{(4)}(x-y) \tag{12.69}$$

であり，微分演算子の反交換関係は次のようになる．

$$\left[\frac{\delta}{\delta\theta(x)}, \frac{\delta}{\delta\theta(y)}\right]_+ = 0, \quad \left[\theta(x), \frac{\delta}{\delta\theta(y)}\right]_+ = \delta^{(4)}(x-y) \tag{12.70}$$

実際問題として，通常は互いに“独立”な，比較的単純な 2 つの Grassmann 場の組合せを扱うことになる．このような Grassmann 場の組を $\theta(x)$ と $\tilde{\theta}(x)$ のように書くことにする．場 $\tilde{\theta}(x)$ も，$\theta(x)$ に関する式(12.66)と式(12.68)-(12.70)と同様の関係式を満たす．$\theta(x)$ と $\tilde{\theta}(x)$ の独立性は，次式で表される．

$$\frac{\delta\theta(x)}{\delta\tilde{\theta}(y)} = 0, \qquad \frac{\delta\tilde{\theta}(x)}{\delta\theta(y)} = 0 \tag{12.71}$$

2 つの独立な場，もしくはその汎関数微分を含む反交換子はすべてゼロになる．例を示してみる．

$$\left[\theta(x), \tilde{\theta}(y)\right]_+ = 0, \qquad \left[\frac{\delta}{\delta\theta(x)}, \frac{\delta}{\delta\tilde{\theta}(y)}\right]_+ = 0 \tag{12.72a}$$

$$\left[\theta(x), \frac{\delta}{\delta\tilde{\theta}(y)}\right]_+ = 0, \quad \left[\tilde{\theta}(x), \frac{\delta}{\delta\theta(y)}\right]_+ = 0 \tag{12.72b}$$

場の理論で扱う典型的な Grassmann 場の組の汎関数は，次のような形のものである．

$$[\theta K\tilde{\theta}] = \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\theta(x)K(x,y)\tilde{\theta}(y) \tag{12.73}$$

$K(x,y)$ は既知の積分核であり，$[\theta K\tilde{\theta}]$ は式(12.49)で導入した略記法に従っている．式(12.71)と式(12.72)を用いると，たとえば次式が得られる．

$$\frac{\delta[\theta K\tilde{\theta}]}{\delta\tilde{\theta}(z)} = -\int \mathrm{d}^4x\,\theta(x)K(x,z) \tag{12.74}$$

さらに複雑な例も示しておく．

$$\begin{aligned}\exp \mathrm{i}[\theta K\tilde{\theta}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int\ldots\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4y_1\ldots\mathrm{d}^4x_n\mathrm{d}^4y_n \\ \times [\theta(x_1)K(x_1,y_1)\tilde{\theta}(y_1)]\ldots[\theta(x_n)K(x_n,y_n)\tilde{\theta}(y_n)]\end{aligned} \tag{12.75}$$

右辺における因子 $[\theta(x_i)K(x_i, y_i)\tilde{\theta}(y_i)]$ の順序は重要ではないことを指摘しておく．これらは Grassmann 場の双一次量であり，互いに可換だからである．同じ理由から，これらは汎関数微分演算子 $\delta/\delta\theta(z)$ や $\delta/\delta\tilde{\theta}(z)$ とも可換である．読者においては，これらの結果を利用して，練習問題として次式を証明してもらいたい．

$$\frac{\delta}{\delta\theta(z)} \exp \mathrm{i}[\theta K\tilde{\theta}] = \mathrm{i}\frac{\delta[\theta K\tilde{\theta}]}{\delta\theta(z)} \exp \mathrm{i}[\theta K\tilde{\theta}] \tag{12.76}$$

12.5　生成汎関数

前節の数学的な準備を踏まえて，生成汎関数自体の議論に取りかかる．12.3節の初めに言及したように，生成汎関数は場の理論の予言を完全に集約したものと見なされ，次章の径路積分と次々章の QCD の議論において中心的な役割を果たすことになる．ここでは生成汎関数を QED の文脈において導入し，それがどのように Green 関数と関係するかを示す．そして相互作用のない場に対する正確な解から，摂動論によって生成汎関数を評価する方法を説明する．

QED の生成汎関数を構築することから始めよう．この目的のために，各量子場に対応する“古典的な”源を虚構的に導入し，相互作用ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)$ に対して源の項 $\mathcal{L}_{\mathrm{S}}(x)$ を追加する．QED の相互作用ラグランジアン密度(12.12)は，

$$\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) + \mathcal{L}_{\mathrm{S}}(x) \tag{12.77}$$

に置き換わり，源のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{\mathrm{S}}(x)$ は，次のように与えられる．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{S}}(x) = J_\kappa(x)A^\kappa(x) + \bar{\sigma}_\alpha(x)\psi_\alpha(x) + \bar{\psi}_\alpha(x)\sigma_\alpha(x) \tag{12.78a}$$

ここで $J_\kappa(x)$ は古典的な4元ベクトルポテンシャルである．$\sigma_\alpha(x)$ と $\bar{\sigma}_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ は独立なスピノル Grassmann 源で，両方がそれら自身およびフェルミオン場 $\psi_\alpha(x)$ と $\bar{\psi}_\alpha(x)$ と反交換する．前章と同様に，通常，スピノル添字 α は明示しないので，式(12.78a)を次のように書く．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{S}}(x) = J_\kappa(x)A^\kappa(x) + \bar{\sigma}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\sigma(x) \tag{12.78b}$$

ここから一時的に物理的な相互作用を無視して，源の項だけを残した運動方程式を考える．すなわち，

$$\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{S}}(x) \tag{12.79}$$

と置く．第4章や第5章と同様に，まずは対応する古典場の理論を考察することにして，すべての場と源が互いに可換と見なす．電磁場の場合，式(12.78)における虚構

的な源 $J_\kappa(x)$ は，ラグランジアン密度(5.10)における物理的な電磁カレント $s^\mu(x)$ と反対の符号に定義される．このことにより，運動方程式(5.12)は次式に置き換わる．

$$\Box A^\mu(x) = -J^\mu(x) \tag{12.80}$$

同じ近似(12.79)の下で，Dirac場の運動方程式は次のようになる(問題12.3参照)．

$$\mathrm{i}\gamma^\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu} - m\psi(x) = -\sigma(x) \tag{12.81a}$$

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\bar{\psi}(x)}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + m\bar{\psi}(x) = -\bar{\sigma}(x) \tag{12.81b}$$

これらの古典的な運動方程式から場の量子論へ移行するには，古典場 $\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ を量子化されたフェルミオン演算子に置き換えることになる．これから示すように，Pauli原理との整合性を保つためには，古典的な源 $\sigma(x)$ と $\bar{\sigma}(x)$ を独立なスピノルGrassmann源として扱う必要がある[11)]．

再び相互作用を含めた量子場の全ラグランジアン(12.77)-(12.78)に戻ると，源の項を加えた相互作用密度 $\mathcal{L}'_\mathrm{I}(x)$ に関するS行列展開は，次式で与えられる．

$$S' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} \int \cdots \int \mathrm{d}^4x_1 \ldots \mathrm{d}^4x_n \,\mathrm{T}\left\{\mathcal{L}'_\mathrm{I}(x_1)\ldots\mathcal{L}'_\mathrm{I}(x_n)\right\} \tag{12.82}$$

源がない場合 $(J_\kappa = \sigma = \bar{\sigma} = 0)$ には $\mathcal{L}_\mathrm{S}(x) = 0$，$\mathcal{L}'_\mathrm{I}(x) = \mathcal{L}_\mathrm{I}(x)$ となり，S' は通常のQEDにおけるS行列(11.40)に帰着する．ここで生成汎関数 $Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ が，次のように定義される．

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{\langle 0|S'|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \tag{12.83}$$

源がなければ $S' \to S$ なので，

$$Z[0,0,0] = 1 \tag{12.84}$$

である．

次に，Green関数と生成汎関数 Z の関係を調べよう．3点Green関数 $G^\mu(x,y,z)$ を考える．

$$G^\mu(x,y,z) = \frac{\langle 0|\mathrm{T}\{S\,A^\mu(x)\,\psi(y)\,\bar{\psi}(z)\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \tag{12.85}$$

---

11) Grassmann場の複素共役を定義していないので，$\sigma^\dagger = (\sigma^*)^\mathrm{T}$ とは書けない．しかし望むならば，新たな場 $\sigma^\dagger \equiv \bar{\sigma}\gamma^0$ と $\bar{\sigma}^\dagger \equiv \gamma^0\sigma$ を“定義”することは可能であり，$\bar{\sigma} = \sigma^\dagger\gamma^0$ のような関係を用いることもできる．

ここで，次式を証明してみる．

$$G^{\mu}(x,y,z)=\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x)}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(y)}\right)\left(-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\sigma(z)}\right)Z[J_{\kappa},\sigma,\bar{\sigma}]\Big|_0 \tag{12.86}$$

右辺の記号 $|_0$ は，汎関数微分の後で，源の項をゼロに設定することを意味する．式(12.85) に用いられているそれぞれの場の因子に対応して，式(12.86) において，それぞれの場に関わる源の項について汎関数微分が施されていることに注意してもらいたい．

S' に対して $\eta(x)$ に関する汎関数微分を施すことを考えよう．$\eta(x)$ は，源 $J_{\kappa}(x)$，$\sigma(x)$，$\bar{\sigma}(x)$ を表す．式(12.82) から，次のように計算する．

$$\begin{aligned}\frac{\delta S'}{\delta\eta(x)} &= \frac{\mathrm{i}}{1!}\int\mathrm{d}^4x_1\,\frac{\delta\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(x_1)}{\delta\eta(x)}\\ &\quad+\frac{\mathrm{i}^2}{2!}\iint\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{T}\left\{\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(x_1)\frac{\delta\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(x_2)}{\delta\eta(x)}+\frac{\delta\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(x_1)}{\delta\eta(x)}\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(x_2)\right\}+\ldots\\ &=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x_1\,\frac{\delta\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(x_1)}{\delta\eta(x)}+2\times\frac{\mathrm{i}^2}{2!}\iint\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\,\mathrm{T}\left\{\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(x_1)\frac{\delta\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(x_2)}{\delta\eta(x)}\right\}+\ldots\\ &=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4z\,\mathrm{T}\left\{S'\frac{\delta\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(z)}{\delta\eta(x)}\right\}\end{aligned} \tag{12.87}$$

式(12.77) と式(12.78)，および前節で論じた汎関数微分の性質を利用すると，次の関係が得られる．

$$\frac{\delta\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(z)}{\delta J_{\mu}(x)}=A^{\mu}(x)\delta^{(4)}(x-z) \tag{12.88a}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(z)}{\delta\sigma(x)}=-\bar{\psi}(x)\delta^{(4)}(x-z),\quad \frac{\delta\mathcal{L}'_{\mathrm{I}}(z)}{\delta\bar{\sigma}(x)}=\psi(x)\delta^{(4)}(x-z) \tag{12.88b}$$

したがって，式(12.87) から次式を得る．

$$\frac{\delta S'(z)}{\delta J_{\mu}(x)}=\mathrm{i}\,\mathrm{T}\{S'A^{\mu}(x)\},\quad \frac{\delta S'}{\delta\bar{\sigma}(x)}=\mathrm{i}\,\mathrm{T}\{S'\psi(x)\},\quad \frac{\delta S'}{\delta\sigma(x)}=-\mathrm{i}\,\mathrm{T}\{S'\bar{\psi}(x)\} \tag{12.89}$$

$Z[J_{\kappa},\sigma,\bar{\sigma}]$ の定義式(12.83) を用いると，式(12.89) を Z の汎関数微分として表すことができる．$\langle 0|S|0\rangle$ は源に依存しないので，式(12.89) から次式が得られる．

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta Z[J_{\kappa},\sigma,\bar{\sigma}]}{\delta J_{\mu}(x)}=\frac{\left\langle 0\left|\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta S'}{\delta J_{\mu}(x)}\right|0\right\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}=\frac{\langle 0|\mathrm{T}\{S'A^{\mu}(x)\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \tag{12.90}$$

式(12.90)に対して更に $\sigma(z)$ と $\bar{\sigma}(y)$ に関する汎関数微分を行い，最後に源を消す極限操作 $S' \to S$ を施すと，生成汎関数から3点Green関数 $G^{\mu}(x,y,z)$ を求める式(12.86)が得られる．

この結果を，直ちに一般化することができる．一般のGreen関数(12.8)は，生成汎関数から次式によって与えられる．

$$G^{\mu\cdots}(x_1,\ldots y_1,\ldots,z_1,\ldots) = (-1)^{\bar{n}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^{n} \left.\frac{\delta^n Z[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1)\ldots\delta\bar{\sigma}(y_1)\ldots\delta\sigma(z_1)\ldots}\right|_0 \tag{12.91}$$

ここで n と $\bar{n}$ は，Green関数(12.8)が含むすべての場の演算子数，およびその中の随伴場の演算子 $\bar{\psi}(x_1),\ldots,\bar{\psi}(x_{\bar{n}})$ の数をそれぞれ表す．結果的に n は式(12.91)における汎関数微分の数であり，$\bar{n}$ はGrassmann源 $\sigma(z_1),\ldots,\sigma(z_n)$ に関する汎関数微分の数となる．式(12.91)は変数 $y_1,y_2,\ldots$ と $z_1,z_2,\ldots$ に関して反対称である．これはGrassmann源に関する汎関数微分が反交換するからである(式(12.70)参照)．

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(y_1)}\frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(y_2)} = -\frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(y_2)}\frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(y_1)}, \quad \text{etc.}$$

言い換えると，スピノル場 $\bar{\psi}$，ψ に対してGrassmann源 σ，$\bar{\sigma}$ を充てることは，Pauli原理との整合性のために必要な措置である．

式(12.91)により，ある理論の生成汎関数(12.83)を正確に評価できるならば，そこから，その理論が予言するあらゆる物理過程に関する正確な解を与えることができる．残念ながらQEDに関してこれを達成することはできず，近似法に頼らざるを得ない．ここでは相互作用のない場に関する正確な解の考察から始めて，摂動論によって生成汎関数を評価してみる．

12.5.1 自由場の場合

自由な場，すなわち相互作用のない場を扱うには，相互作用項 $\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)$ をゼロと置き，虚構的な源の項 $\mathcal{L}_\mathrm{S}(x)$ (式(12.78))だけを残せばよい．QEDのS行列(11.40)は $S_0 = 1$ となり(添字の0は $\mathcal{L}_\mathrm{I}(x) = 0$ と置いたことを意味する)，源を含んだ相互作用ラグランジアン密度 $\mathcal{L}'_\mathrm{I}(x)$ (式(12.77))は，ここでは，

$$\mathcal{L}'_\mathrm{I}(x) = \mathcal{L}_\mathrm{S}(x) \tag{12.92}$$

である．S' の展開式(12.82)は，次のようになる．

$$S'_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int\ldots\int \mathrm{d}^4x_1\ldots\mathrm{d}^4x_n\,\mathrm{T}\{\mathcal{L}_\mathrm{S}(x_1)\ldots\mathcal{L}_\mathrm{S}(x_n)\} \tag{12.93}$$

自由場の生成汎関数は，式(12.83)により，

$$Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]=\langle 0|S'_0|0\rangle \tag{12.94}$$

と与えられる．何故なら，ここでは，

$$\langle 0|S_0|0\rangle=1 \tag{12.95}$$

となるからである．

ここから，電磁場の源 $J_\mu(x)$ とフェルミオン場の源 $\sigma(x)$，$\bar{\sigma}(x)$ に対する依存性をそれぞれ独立に解いて，自由場の生成汎関数の具体的な式を得る方法を示す．

$Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]$ の汎関数微分方程式を得て，それを解くことによって，源 $J_\mu(x)$ への具体的な依存性が見出される．

必要な微分方程式を得るために，出発点として次式を考える．

$$\frac{\delta Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)}=\mathrm{i}\langle 0|\mathrm{T}\{S'_0A^\mu(x)\}|0\rangle \tag{12.96}$$

この式は，S' からの式(12.90)の導出と全く同様の方法で，S'_0 から式(12.95)を考慮することで導かれる．式(12.96)の右辺を H.P. に変換する．式(12.1)と式(12.8)により，次式を得る．

$$\langle 0|\mathrm{T}\{S'_0A^\mu(x)\}|0\rangle={}_{\mathrm{H}}\langle 0|A^{\mu\mathrm{H}}(x)|0\rangle_{\mathrm{H}}\langle 0|S'_0|0\rangle \tag{12.97}$$

この式と Z_0 の定義式(12.94)を用いると，式(12.96)は次のようになる．

$$\frac{\delta Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)}=\mathrm{i}\,{}_{\mathrm{H}}\langle 0|A^{\mu\mathrm{H}}(x)|0\rangle_{\mathrm{H}}\,Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}] \tag{12.98}$$

ここで求めたい Z_0 に関する微分方程式は，式(12.98)に4次元Laplace演算子 $\Box_x$ を作用させることによって得られる．$A^{\mu\mathrm{H}}(x)$ は運動方程式(12.80)を満たすので，

$$\Box_x A^{\mu\mathrm{H}}(x)=-J^\mu(x) \tag{12.99}$$

である．$Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]$ は x には依存せず，$J_\mu(x)$ は古典的な源なので，式(12.98)から次の汎関数微分方程式が得られる．

$$\Box_x\frac{\delta Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)}=-\mathrm{i}J^\mu(x)\,Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}] \tag{12.100}$$

この式を標準的な方法で解いてみる．$\Delta^{\mu\nu}(x-x')$ が，次の方程式の解を表すものとする．

$$\Box_x\Delta^{\mu\nu}(x-x')=g^{\mu\nu}\delta^{(4)}(x-x') \tag{12.101}$$

境界条件は後から決める．この式を $\{-\mathrm{i}J_\nu(x')\,Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]\}$ と掛け合わせて，ν に関する和と x' に関する積分を施すと，次式になる．

$$\Box_x\int \mathrm{d}^4x'\,\Delta^{\mu\nu}(x-x')\left\{-\mathrm{i}J_\nu(x')\,Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]\right\} = -\mathrm{i}J^\mu(x)\,Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}] \tag{12.102}$$

これを式(12.100) と比べると，次式が得られる．

$$\frac{\delta Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)} = \left\{-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x'\,\Delta^{\mu\nu}(x-x')\,J_\nu(x')\right\}Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}] \tag{12.103}$$

通常の微分方程式,

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \Phi(x)\,f(x)$$

は,

$$f(x) = \mathrm{const.}\,\mathrm{e}^{F(x)}$$

という形の解を持ち，これを微分方程式に代入して $F(x)$ を見出すことができるが，これと同様に式(12.103) は次の形の解を持つ．

$$Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}] = N[\sigma,\bar{\sigma}]\mathrm{e}^{F[J]} \tag{12.104}$$

$N[\sigma,\bar{\sigma}]$ はスピノル源 σ と $\bar{\sigma}$ の任意の汎関数である．汎関数 $F[J]$ は式(12.104) を式(12.103) に代入することによって見出される．式(12.56d) により,

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\,\mathrm{e}^{F[J]} = \frac{\delta F[J]}{\delta J_\mu(x)}\,\mathrm{e}^{F[J]}$$

なので，次のようになる．

$$\frac{\delta F[J]}{\delta J_\mu(x)} = \Phi \tag{12.105a}$$

$$\Phi \equiv -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x'\,\Delta^{\mu\nu}(x-x')\,J_\nu(x')$$

ここから汎関数 $F[J]$ を解くために，Φ を書き直す．そのために,

$$\frac{\delta J_\sigma(x'')}{\delta J_\mu(x)} = \delta^\mu_\sigma\,\delta^{(4)}(x''-x')$$

を利用して，次式を得る．

$$\Phi = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x'\,\mathrm{d}^4x''\,\frac{\delta J_\sigma(x'')}{\delta J_\mu(x)}\,\Delta^{\sigma\nu}(x''-x')\,J_\nu(x')$$

式(12.101)から $\Delta^{\sigma\nu}(x''-x') = \Delta^{\nu\sigma}(x''-x')$ という関係が成り立つので，

$$\Phi = \frac{-\mathrm{i}}{2}\iint \mathrm{d}^4x'\mathrm{d}^4x''\left\{\frac{\delta J_\sigma(x'')}{\delta J_\mu(x)}\Delta^{\sigma\nu}(x''-x')J_\nu(x') + J_\sigma(x'')\Delta^{\sigma\nu}(x''-x')\frac{\delta J_\nu(x')}{\delta J_\mu(x)}\right\}$$
$$= \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\left\{\frac{-\mathrm{i}}{2}\iint \mathrm{d}^4x'\mathrm{d}^4x'' J_\sigma(x'')\Delta^{\sigma\nu}(x''-x')J_\nu(x')\right\}$$
$$\equiv \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\left\{\frac{-\mathrm{i}}{2}[J_\sigma\Delta^{\sigma\nu}J_\nu]\right\} \tag{12.105b}$$

となる．最後の式は J_σ と J_ν の汎関数 $[J_\sigma\Delta^{\sigma\nu}J_\nu]$ の定義になっているが，これは式(12.49)の記法と整合している．式(12.105a)と式(12.105b)により，

$$F[J] = \left\{\frac{-\mathrm{i}}{2}[J_\sigma\Delta^{\sigma\nu}J_\nu]\right\}$$

なので，式(12.104)から，解が次のように与えられる．

$$Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}] = N[\sigma,\bar{\sigma}]\exp\left\{\frac{-\mathrm{i}}{2}[J_\sigma\Delta^{\sigma\nu}J_\nu]\right\} \tag{12.106}$$

式(12.101)における適切な解 $\Delta^{\mu\nu}(x-x')$ を決めるという問題が残っている．これを行うために，自由場において $S \to S_0 = 1$ であり，2点Green関数(12.20)が，

$$G_0^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|\mathrm{T}\{A^\mu(x)A^\nu(y)\}|0\rangle = \mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(x-y) \tag{12.107a}$$

となることに注意する．$D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(x-y)$ は Feynman の自由光子伝播関数(5.26)-(5.27)である．他方，式(12.91)により，自由場に関して，

$$G_0^{\mu\nu}(x-y) = \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^2 \frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x)\delta J_\nu(y)}\bigg|_0 \tag{12.108}$$

であり，これを式(12.106)から評価すると，

$$G_0^{\mu\nu}(x-y) = \mathrm{i}\Delta^{\mu\nu}(x-y) \tag{12.107b}$$

となる．式(12.107a)と式(12.107b)を比べると，$\Delta^{\mu\nu}(x-y)$ を $D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(x-y)$ に同定すべきことが分かる．したがって自由場生成汎関数の源 $J_\mu(x)$ に対する依存性を表す式は，最終的に次のように与えられる．

$$Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}] = N[\sigma,\bar{\sigma}]\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}[J_\mu D_\mathrm{F}^{\mu\nu}J_\nu]\right\} \tag{12.109}$$

自由場生成汎関数のスピノル源 $\sigma(x)$ と $\bar{\sigma}(x)$ に対する依存性も，$J_\mu(x)$ への依存性と同様の方法で得られるが，式(12.89)の第1式ではなく，第2式を出発点とする

(問題12.6参照). 自由場生成汎関数に関して最終的に得られる式を示す.

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = Z_0[J_\kappa]\, Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] \tag{12.110a}$$

$$Z_0[J_\kappa] = \exp\Big\{-\frac{\mathrm{i}}{2}[J_\mu D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu} J_\nu]\Big\} \tag{12.110b}$$

$$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] = \exp\big\{-\mathrm{i}[\bar{\sigma} S_{\mathrm{F}} \sigma]\big\} \tag{12.110c}$$

$S_{\mathrm{F}}(x-x')$ は自由電子伝播関数(4.61)および(4.63)である. ここでも次のように省略記法を用いた.

$$[\bar{\sigma} S_{\mathrm{F}} \sigma] = \int \mathrm{d}x' \mathrm{d}x'' \bar{\sigma}(x')\, S_{\mathrm{F}}(x'-x'')\, \sigma(x'') \tag{12.111}$$

12.5.2 摂動展開

QEDの生成汎関数(12.83)は, まだ閉じた形で評価されていない. しかしながら, 摂動論の全次数において妥当する有用な式が, QED相互作用 $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)$ を次のように置き換えることによって導かれる.

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}\lambda}(x) = \lambda \mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) = \lambda e \bar{\psi}(x) \not{A}(x) \psi(x) \tag{12.112}$$

λ は実数のパラメーターである. ここでは一時的にQED相互作用 $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)$ (式(12.12))において正規順序化を無視することにする. QEDのS行列(11.40)は, 次のように表される.

$$S_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} \int \ldots \int \mathrm{d}^4 x_1 \ldots \mathrm{d}^4 x_n \, \mathrm{T}\{\mathcal{L}_{\mathrm{I}\lambda}(x_1) \ldots \mathcal{L}_{\mathrm{I}\lambda}(x_n)\} \tag{12.113}$$

源を含んだ相互作用(12.77)は, 次式に置き換わる.

$$\mathcal{L}'_{\mathrm{I}\lambda}(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{I}\lambda}(x) + \mathcal{L}_{\mathrm{S}}(x) = \lambda \mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) + \mathcal{L}_{\mathrm{S}}(x) \tag{12.114}$$

そして式(12.82)の S' は, 次のようになる.

$$S'_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} \int \ldots \int \mathrm{d}^4 x_1 \ldots \mathrm{d}^4 x_n \, \mathrm{T}\{\mathcal{L}'_{\mathrm{I}\lambda}(x_1) \ldots \mathcal{L}'_{\mathrm{I}\lambda}(x_n)\} \tag{12.115}$$

生成汎関数(12.83)は λ の関数として与えられる.

$$Z_\lambda[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{\langle 0|S'_\lambda|0\rangle}{\langle 0|S_\lambda|0\rangle} \tag{12.116}$$

$\lambda = 0$ と置くと，これらの式は自由場の諸量に帰着する．$\lambda = 1$ と置くと相互作用を持つ QED における諸量となる．

式(12.115)と式(12.116)から $Z_\lambda[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ の λ に関する冪(べき)展開を得るために，式(12.115)を λ に関して微分する．式(12.114)から $\partial\mathcal{L}'_{\mathrm{I}\lambda}(x)/\partial\lambda = \mathcal{L}_\mathrm{I}(x)$ であり，よって式(12.115)から，

$$\frac{\partial S'_\lambda}{\partial\lambda} = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{T}\{S'_\lambda \mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\} \tag{12.117}$$

が得られる．汎関数微分 S' から式(12.89)が導かれたのと同様にして，S'_λ の式(12.115)から次式を得る．

$$eI_\delta(x)\, S'_\lambda = \mathrm{T}\{S'_\lambda \mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\} \tag{12.118}$$

ここで導入した相互作用演算子 $I_\delta(x)$ は，次のように定義される．

$$I_\delta(x) = \left(-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\sigma(x)}\right)\gamma_\mu\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\bar{\sigma}(x)}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right) \tag{12.119}$$

式(12.117)と式(12.118)を組み合わせると，λ を変数とする微分方程式が得られる．

$$\frac{\partial S'_\lambda}{\partial\lambda} = \mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x\, I_\delta(x)\, S'_\lambda$$

この式の真空期待値を取ると，

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\langle 0|S'_\lambda|0\rangle = \mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x\, I_\delta(x)\,\langle 0|S'_\lambda|0\rangle$$

となり，解が，次のように与えられる．

$$\langle 0|S'_\lambda|0\rangle = \exp\left\{\mathrm{i}e\lambda\int \mathrm{d}^4x\, I_\delta(x)\right\}\langle 0|S'_0|0\rangle \tag{12.120}$$

最後の式を λ について微分すれば，これが解であることを容易に確認できる．式(12.120)は適正な境界条件，すなわち $\lambda \to 0$ のときに $\langle 0|S'_\lambda|0\rangle \to \langle 0|S'_0|0\rangle$ を満たす．式(12.116)と式(12.94)を用いると，式(12.120)は次のように書き直される．

$$\langle 0|S_\lambda|0\rangle\, Z_\lambda[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \exp\left\{\mathrm{i}e\lambda\int \mathrm{d}^4x\, I_\delta(x)\right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$$

$\lambda = 1$ と置くと，

$$\langle 0|S|0\rangle\, Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \exp\left\{\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x\, I_\delta(x)\right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \tag{12.121}$$

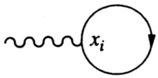


図12.14　QEDにおいて同時刻縮約(12.123)から生じる寄与のないサブグラフ.

となり，指数関数を展開すると，摂動展開が得られる.

$$\langle 0|S|0\rangle Z[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{ie})^n}{n!}\left[\int \mathrm{d}^4x\, I_\delta(x)\right]^n Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}] \tag{12.122}$$

自由場の生成汎関数 Z_0 と相互作用演算子 $I_\delta(x)$ は，それぞれ式(12.110)と式(12.119)によって与えられる．式(12.121)もしくは式(12.122)を式(12.91)に代入してGreen関数を計算すると，分母にも因子 $\langle 0|S|0\rangle$ が現れることが分かる．12.2.3項で見たように，この因子はGreen関数の分子の展開において現れる非連結真空グラフの部分とちょうど相殺する．連結Green関数を計算する際には，これらを無視してよい.

上述の結果を得るにあたり，我々は相互作用ラグランジアン(12.112)において場の正規順序化を省いた．12.2.1項で見たように，Green関数の計算において正規順序化の効果は，式(12.16b)の形のWick展開の真空期待値から，同時刻縮約を省くことであった．Green関数における式(12.113)のS行列展開へWickの定理を適用する際に生じるゼロにならない同時刻縮約は，次の形のものだけである.

$$F^\mu A_\mu(x_i) \equiv \underbrace{\bar{\psi}(x_i)\,\not{A}(x_i)\,\psi}(x_i) \tag{12.123}$$

これは図12.14のサブグラフに対応する．このサブグラフは実際には恒等的にゼロになり，S行列展開項の中で，これを含む項はすべてゼロになる．このことを見るために，まずスピノル添字を明示して，通常の方法で次式を得る.

$$F^\mu \equiv \underbrace{\bar{\psi}_\alpha(x_i)\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta}(x_i) = (-1)\,\mathrm{Tr}[\gamma^\mu S_\mathrm{F}(0)]$$

ここに式(4.63)を代入し，積分を定義するために次元正則化を適用すると[12]，次式を得る.

$$F^\mu = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^D p\,\frac{4p^\mu}{p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon} = 0$$

---

[12] 本章全体を通じて，何らかの正則化を暗に仮定している．たとえば次元正則化によって，理論の対称性を損なうことなくループ積分を定義しているものと見る.

ここでは対角和(トレース)を評価し，式(10.32)を利用した．このことにより，QEDではGreen関数の計算において相互作用の正規順序化を無視してもよい．生成汎関数の計算も同様であり，先述の計算において採用した仮定が正当化されたことになる．

練習問題

12.1 Green関数(12.32)の連結部分だけを2次まで計算し，運動量空間のGreen関数(12.35)を導け．

12.2 次の反応，

$$\gamma(k,r)+e^{+}(p,s)\ \rightarrow\ \gamma(k',r')+e^{+}(p',s')$$

$$\gamma(k,r)+\gamma(k',r')\ \rightarrow\ e^{-}(p,s)+e^{+}(p',s')$$

のFeynman振幅を，式(12.36)によって定義される結節部分関数$\Gamma_{\alpha\beta}(k_1,k_2,p_1,p_2)$によって表し，式(12.37)を用いて2次までの具体的な式を導け．

12.3 相互作用をせず，源がある場合の古典的なDirac場のラグランジアン密度は，次式で与えられる．

$$\mathcal{L}(x)=\mathcal{L}_0(x)+\bar{\sigma}(x)\psi(x)+\bar{\psi}(x)\sigma(x)$$

$\mathcal{L}_0(x)$は式(4.20)で与えられる．$\mathcal{L}(x)$において，$\bar{\psi}(x)$および$\psi(x)$に関する変分をそれぞれ考えてEuler-Lagrange方程式を書き，式(12.81a)と式(12.81b)を導け．

12.4 この問題では，前問で古典的な式として得た式(12.81a)が，量子論の式としても成立することを確認する．

物理的な相互作用を無視して源の項を残した近似式(12.79)において，式(12.77)に対応するハミルトニアンは，

$$H=H_0-\int \mathrm{d}^3z\,\bar{\sigma}(z)\psi(z)-\int \mathrm{d}^3z\,\bar{\psi}(z)\sigma(z)$$

となる．H_0は式(4.22)で与えられる．フェルミオン場を含まない項は無視する．

問題4.1で導いた同時刻反交換関係を用いて，次式を証明せよ．

$$[H,\psi(x)]=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^j\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^j}-m\gamma^0\psi(x)+\gamma^0\sigma(x)$$

添字jは，通例に従い$1,2,3$の和を取る．Grassmann源は，フェルミオン場と反交換する．

$$[\sigma,\psi]_+=[\sigma,\bar{\psi}]_+=[\bar{\sigma},\psi]_+=[\bar{\sigma},\bar{\psi}]_+=0$$

場の演算子$\psi(x)$に関するHeisenbergの運動方程式，

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}=[\psi(x),H]$$

が，前問で得た古典的な運動方程式(12.81a)と一致することを示せ．

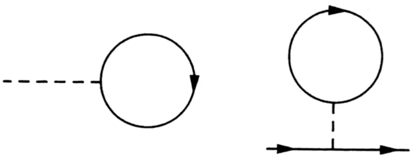


図12.15 (a) スカラー中間子の理論 (式(11.71)) において同時刻縮約から生じるゼロにならないサブグラフ. (b) そのサブグラフの自己エネルギーへの2次の寄与.

12.5 式(12.108) の汎関数微分を実行し, 源をゼロにする極限操作を施して, 式(12.107b) を導出せよ.

12.6 本文において, 自由場生成汎関数の源 $J_\mu(x)$ に対する依存性の式(12.110b) を導いた. 式(12.89) の第1式の代わりに第2式を出発点として, 同じようにしてスピノル源 $\sigma(x)$, $\bar{\sigma}(x)$ に対する依存性の式(12.110c) を導出せよ.

12.7 スカラー中間子の理論(11.71) を考える. 相互作用に正規順序化を課さなければ, QED における図12.14 と類似の, 図12.15(a) に示すサブグラフが生じる. QED とは対照的に, このサブグラフはゼロにはならない. これは2次において, 自己エネルギーに図12.15(b) のような寄与をもたらす. この付加項は, QED における式(9.26)-(9.28) と同様に, 質量の繰り込み定数 δm^2 だけに影響を持つことを示し, 次元正則化の技法によって δm^2 の値を求めよ.

第 13 章　径路積分

ここまで我々は場の量子論を，場を非可換な演算子によって表す正準形式の定式化の下で利用してきた．このアプローチは非相対論的な量子力学から入りやすい方法であり，その定式化の物理的な意味を単純かつ直接的な方法で把握することができる．しかしこれを非Abel（アーベル）ゲージ理論に適用することは難しい．非Abelゲージ理論では，相互作用の源として働く各保存電荷が互いに非可換である．QCDにおける色電荷 $\hat{F}_i$ はその例にあたる．そこで我々は，このような理論の取扱いに適している“径路積分”(path integral)による定式化を導入する．

本章では最初に汎関数積分の諸性質を考察するが，この知識は本章の後の方で必要となる．それから径路積分による場の量子論の定式化を，QEDの文脈において導入する．QCDへの応用は，次の第14章で行う．

13.1　汎関数積分

汎関数積分は最初，Wienerによって Brown運動の研究のために導入され，その後，量子力学の文脈において Dirac と Feynman が少々異なる形で用いた[1]．これらの初期の応用において，積分対象となる関数がしばしば粒子の軌道，すなわち径路を表していた．この理由から，“径路積分”という呼称が“汎関数積分”と同義で用いられている．本節では，簡潔に汎関数積分を導入し，後から必要となる重要な力学的性質をいくつか調べておく．

13.1.1　古典場

汎関数積分の定義から話を始める．

$$\int \mathcal{D}\phi\, F[\phi] \tag{13.1}$$

---

[1] これらの２つのアプローチに関する興味深い解説と比較は，C. Nash, *Relativistic Quantum Fields*, Academic Press, 1978 に与えられている．

$F[\phi]$ は実スカラー場 $\phi(x)$ の汎関数である．この積分を，以下のように指定されるすべての可能な関数の集団に関して，汎関数 $F[\phi]$ の和を取ったものと見なす．汎関数積分を定義するひとつの方法としては，まず完全正規直交関数系 $u_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ を導入する．

$$\int \mathrm{d}^4 x\, u_i(x) u_j(x) = \delta_{ij} \tag{13.2}$$

これを用いて，$\phi(x)$ を無限級数に展開する．

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i(x) \tag{13.3}$$

和を実行する関数集団を構成する各関数は，展開係数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ によって指定される．これらは $-\infty < \alpha_i < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$ の範囲で全ての値を取るものとする．仮に展開級数(13.3) を第 n 項までで打ち切るならば，式(13.1) の中の汎関数 $F[\phi]$ は，n 個のパラメーター $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を引数とする関数に置き換えられる．

$$F[\phi] \;\rightarrow\; F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

そうすると汎関数積分(13.1) を，次のような極限操作によって定義できる．

$$\int \mathcal{D}\phi\, F[\phi] \equiv \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha_n}{\sqrt{2\pi}} F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \right) \tag{13.4}$$

この定義は，有限でゼロでない極限値が存在する場合に成立する．“加重因子”$1/\sqrt{2\pi}$ は，場の理論において現れる“Gauss(ガウス)型”の汎関数積分を想定して選んである．これは典型的に次の形を持つ．

$$I \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ -\frac{1}{2} [\phi K \phi] \right\} \tag{13.5}$$

ここでは式(12.49) の略記法を採用した．すなわち，

$$[AKB] \equiv \int \mathrm{d}^4 x \int \mathrm{d}^4 y\, A(x) K(x, y) B(y) \tag{13.6}$$

である．$K(x, y)$ は実対称演算子とする $(K(x, y) = K(y, x))$．

上述の概念を具体的に示すために，標準的な積分(13.5) を評価してみる．式(13.4) の定義を，式(13.2) および式(13.3) と共に用いると，この積分は次のように与えられる．

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\sqrt{2\pi}} \right) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i K_{ij} \alpha_j \right\} \tag{13.7}$$

ここで現れる係数 K_{ij} は,

$$K_{ij} = \int d^4x \int d^4y\, u_i(x) K(x,y) u_j(y) \tag{13.8}$$

と定義される $(i,j=1,2,\ldots,n)$. これらの係数は実対称な n 次元正方行列 K_n の要素を構成し，この正方行列は n 次元直交行列 O_n (要素を O_{ij} と記す) によって対角化することが可能である．ここで新たな変数,

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} O_{ij}\alpha_j \tag{13.9}$$

を導入すると，次のように書ける.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i K_{ij} \alpha_j = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \lambda_i \delta_{ij} \beta_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i^2 \tag{13.10}$$

ここで λ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ は K_n の固有値である．式(13.7) における積分要素の積については,

$$\prod_{i=1}^{n} d\beta_i = \det O_n \prod_{i=1}^{n} d\alpha_i = \prod_{i=1}^{n} d\alpha_i \tag{13.11}$$

という関係が成り立つ．これは直交行列の行列式が 1 であることに依る．式(13.10) と式(13.11) を式(13.7) に代入し,

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\beta_i^2\right\} = \prod_{i=1}^{n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_i\beta_i^2\right\}$$

の関係を用いると，次式が得られる.

$$I_n = \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\beta_i}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_i\beta_i^2\right\}\right) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1/2} = (\det K_n)^{-1/2}$$

$(\det K_n = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ による.) したがって式(13.7) を用いると，最終的に次式を得る.

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{1}{2}[\phi K \phi]\right\} = (\det K)^{-1/2} \tag{13.12}$$

ここで,

$$\det K = \lim_{n\to\infty} \det K_n \tag{13.13}$$

である．重要な例としては,

$$\int \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{-[\phi^2]/2} = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\alpha_i^2/2}\right) = 1 \tag{13.14}$$

が見出される．ここでは次の表記法を用いた．

$$[\phi\psi] \equiv \int \mathrm{d}^4x\, \phi(x)\,\psi(x) \tag{13.15}$$

汎関数積分を定義する上述とは別の方法として，時空全体を小さな時空体積 Δ を持つ胞(セル)に分割する方法がある．各胞の中心を格子点 x_i に選ぶ．各胞の内部における ϕ の値は定数 $\phi_i = \phi(x_i)$ によって近似される．そこで，たとえば，

$$[\phi^2] \equiv \int \mathrm{d}^4x\{\phi(x)\}^2 = \sum_i \Delta\phi_i^2$$

となり，任意の汎関数が，

$$F[\phi] \;\to\; F(\phi_1, \phi_2, \ldots)$$

と表される．汎関数積分は，次式によって定義される．

$$\int \mathcal{D}\phi\, F[\phi] \equiv \lim_{\Delta\to 0}\left[\left(\frac{\Delta}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\phi_1 \left(\frac{\Delta}{2\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\phi_2 \;\ldots\; F(\phi_1, \phi_2, \ldots)\right] \tag{13.16}$$

有限のゼロでない極限が存在するならば，この定義が成立する．ここでも加重因子は場の理論に現れる汎関数の型に合わせてあり，単純な Gauss 積分の場合に先ほど得た式(13.14) の結果を容易に再現できる．我々が必要とする他の積分も，式(13.14) から汎関数積分の一般的な性質を通じて得ることができ，そのような一般的性質は上述のどちらの定義からも導かれる．したがって両方の定義が等しく満足のいくものである．ここから先は，式(13.4) の定義を採用する．

汎関数積分において最も重要な一般的性質は，上の定義から直接に与えられる．

(i) 線形性 (linearity)：

$$\int \mathcal{D}\phi\big(aF[\phi] + bG[\phi]\big) = a\int \mathcal{D}\phi\, F[\phi] + b\int \mathcal{D}\phi\, G[\phi] \tag{13.17}$$

ここで a と b は任意の定数である．

(ii) “並進(平行移動)” 不変性 (*translation* invariance)：

$$\int \mathcal{D}\phi\, F[\phi + f] = \int \mathcal{D}\phi\, F[\phi] \tag{13.18}$$

$f(x)$ は $\phi(x)$ に対して独立な任意の関数である．

この性質を見るために，$f(x)$ を $u_i(x)$ によって展開する．

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i u_i(x)$$

定義(13.4) から，次式を得る．

$$\int\mathcal{D}\phi\,F[\phi]=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\sqrt{2\pi}}\right)F(\alpha_1+f_1,\ldots,\alpha_n+f_n)\right\}$$

ここで新たな積分変数 $\beta_i=\alpha_i+f_i$ を導入すると，式(13.18) が直ちに得られる．

積分変数を ϕ から $\bar{\phi}$ へ変更することの考察も有用である．後者の変数は次のように定義される．

$$\bar{\phi}(x)=\int\mathrm{d}^4y\,K(x,y)\phi(y) \tag{13.19}$$

ϕ と $\bar{\phi}$ を両方とも式(13.3) の形に展開し，その展開係数をそれぞれ α_i および $\bar{\alpha}_i$ と置く．これらは次のように関係する．

$$\bar{\alpha}_i=\sum_{j=1}^{\infty}K_{ij}\alpha_j \tag{13.20}$$

$$K_{ij}=\int\mathrm{d}^4x\int\mathrm{d}^4y\,u_i(x)K(x,y)u_j(y)$$

級数を第 n 項までで打ち切るならば，

$$\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\bar{\alpha}_i=\det K_n\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\alpha_i \tag{13.21}$$

となる．K_n は要素を K_{ij} とする n 次元正方行列である．定義式(13.4) と合わせて，式(13.19) で定義された変数の変更において，次の結果が得られる．

$$\int\mathcal{D}\bar{\phi}\,F[\phi]=\det K\int\mathcal{D}\phi\,F[\phi] \tag{13.22}$$

$$\det K\equiv\lim_{n\to\infty}\det K_n$$

場の理論では典型的に，次のような形で定義される実スカラー源 $J(x)$ の汎関数 $I[J]$ が扱われることになる (後出の式(13.79a) と式(13.85) など)．

$$I[J]=N\int\mathcal{D}\phi\,\exp\bigl(A[J,\phi]\bigr) \tag{13.23}$$

$$A[J,\phi]=-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\int\mathrm{d}^4y\,\phi(x)K(x,y)\phi(y)+\int\mathrm{d}^4x\,J(x)\phi(x) \tag{13.24}$$

ここで $K(x,y)$ は実対称演算子 $(K(x,y)=K(y,x))$ である．N は規格化定数で，次の規格化条件によって決まる．

$$I[J=0]=1 \tag{13.25}$$

$I[J]$ の式(13.23) を簡単にすることができる．これから示すように，汎関数積分を含まないように変換できるのである．源の項があるために式(13.23) はGauss型(13.5) ではない．しかし“自乗を形成する”ことでGauss型へ移行できる．K の“逆演算子”K^{-1} を，次式によって定義する．

$$\int \mathrm{d}^4x'\, K(x,x')\, K^{-1}(x',x'') = \delta^{(4)}(x-x'') \tag{13.26}$$

そして，“シフトした”スカラー場を，次のように導入する．

$$\phi'(x) = \phi(x) - \int \mathrm{d}^4x'\, K^{-1}(x,x')\, J(x') \tag{13.27}$$

このシフトした場を式(13.24) に代入すると，次のようになる．

$$\begin{aligned} A[J,\phi] = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4y \left\{ \phi'(x) + \int \mathrm{d}^4x'\, K^{-1}(x,x')\, J(x') \right\} \\ \times K(x,y) \left\{ \phi'(y) + \int \mathrm{d}^4y'\, K^{-1}(y,y')\, J(y') \right\} \\ + \int \mathrm{d}^4x\, J(x) \left\{ \phi'(x) + \int \mathrm{d}^4x'\, K^{-1}(x,x')\, J(x') \right\} \end{aligned} \tag{13.28}$$

この式は，式(13.26) を繰り返し用いることによって，簡単な形になる．

$$A[J,\phi] = \frac{1}{2}[JK^{-1}J] - \frac{1}{2}[\phi' K \phi'] \tag{13.29}$$

ここでも式(13.6) と同じ表記法を用いている．式(13.29) を式(13.23) に代入すると，次式を得る．

$$I[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ \frac{1}{2}[JK^{-1}J] - \frac{1}{2}[\phi' K \phi'] \right\} \tag{13.30}$$

この式の指数関数の中のすべての因子は互いに可換なので，因数分解できる．

$$\exp\left\{ \frac{1}{2}[JK^{-1}J] \right\} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2}[\phi' K \phi'] \right\} \tag{13.31}$$

更に，前の方の指数関数因子は ϕ に依存しないので，式(13.30) の汎関数積分の外に出すことができて，次のようになる．

$$I[J] = N \exp\left\{ \frac{1}{2}[JK^{-1}J] \right\} \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ -\frac{1}{2}[\phi' K \phi'] \right\} \tag{13.32}$$

式(13.27) により，ϕ' は，

$$\phi'(x) = \phi(x) + f(x)$$

という形に表され，$f(x)$ は $\phi(x)$ には依存しないので，並進不変性(13.18) から次式が得られる．

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{1}{2}[\phi' K \phi']\right\} = \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{-\frac{1}{2}[\phi K \phi]\right\}$$

これは定数である．したがって式(13.32) において，この因子を規格化定数 N に吸収してしまうことができる．最終的な結果は，

$$I[J] = \exp\left\{\frac{1}{2}[JK^{-1}J]\right\} \tag{13.33}$$

となる．ここでは規格化条件(13.25) を課してある．

13.1.2 Grassmann数

Grassmann場の積分を論じるために，まず離散的な Grassmann数 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ に関する積分を定義する必要がある．このような変数に関する微分について 12.4.2項で論じたが，微分の逆演算として積分を定義することはできない．Grassmann代数の要素(12.60) において，θ_i について微分したときに θ_i という結果を与えるようなものは存在しないからである．代わりに演算子 $\int \mathrm{d}\theta_i$ を以下のように定義する．

(i) $$\int \mathrm{d}\theta_i 1 = 0, \quad \int \mathrm{d}\theta_i \theta_i = 1 \tag{13.34}$$

(ii) Grassmann代数の一般の要素(12.60) を，

$$f(p) = A + \theta_i B \tag{13.35}$$

という形に書く (A と B は θ_i に依存しない)．積分を次のように定義する．

$$\int \mathrm{d}\theta_i f(p) = \int \mathrm{d}\theta_i (A + \theta_i B) = \left(\int \mathrm{d}\theta_i 1\right) A + \left(\int \mathrm{d}\theta_i \theta_i\right) B = B \tag{13.36}$$

これらの定義により，積分は基本的に微分と同じであることが導かれる．たとえば，2次元Grassmann代数の最も一般的な要素(12.61a) に関して，次式を容易に証明できる．

$$\int \mathrm{d}\theta_1 f(p) = p_1 + p_{12}\theta_2 = \frac{\partial f}{\partial \theta_1}$$

微分と同様に，因子の順序に注意を払う必要がある．例えば，

$$\int d\theta_1\theta_1\theta_2 = \left(\int d\theta_1\theta_1\right)\theta_2 = \theta_2, \quad \int d\theta_1(\theta_2\theta_1) = \int d\theta_1(-\theta_1\theta_2) = -\theta_2 \tag{13.37}$$

である．$\int d\theta_i$ の定義から，その線形性が容易に証明される．すなわち，

$$\int d\theta_i\{f(p)+f(q)\} = \int d\theta_i f(p) + \int d\theta_i f(q)$$

となる．$f(p)$ と $f(q)$ は Grassmann代数の２つの要素である．並進不変性も成立する．たとえば α が θ_i とは独立な，もうひとつの Grassmann変数であるならば，

$$\int d\theta_i F(\theta_1,\ldots,\theta_i,\ldots,\theta_n) = \int d\theta_i F(\theta_1,\ldots,\theta_i+\alpha,\ldots,\theta_n) \tag{13.38}$$

が成り立つ．式(13.38)は，$F(\theta_1,\ldots,\theta_i,\ldots,\theta_n)$ を式(13.35)の形に書けば，容易に導かれる．

ここから多重積分も直接的に定義される．２重積分は，

$$\int d\theta_1 d\theta_2 F(\theta_1,\theta_2) = \int d\theta_1\left\{\int d\theta_2 F(\theta_1,\theta_2)\right\} \tag{13.39}$$

であり，３重以上の積分への拡張方法も自明である．多重積分の例を示す．

$$\int d\theta_1 d\theta_2\theta_1\theta_2 = \int d\theta_1\left\{\int d\theta_2\theta_1\theta_2\right\} = \int d\theta_1(-\theta_1) = -1 \tag{13.40}$$

$$\int d\theta_1 d\theta_2\ldots d\theta_n\,\theta_1\theta_2\ldots\theta_n = \int d\theta_1 d\theta_2\ldots d\theta_n\,\theta_n\theta_{n-1}\ldots\theta_1(-1)^\kappa = (-1)^\kappa \tag{13.41}$$

ここで κ は次のように与えられる．

$$\kappa = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{n(n-1)}{2} \tag{13.42}$$

多重積分において，積分要素の順序に注意が必要である．たとえば式(13.40)と，

$$\int d\theta_2 d\theta_1\theta_1\theta_2 = \int d\theta_2\left\{\int d\theta_1\theta_1\theta_2\right\} = 1$$

を比べてもらいたい．

線形性と並進不変性は多重積分においても成立する．たとえば，

$$\begin{aligned}&\int d\theta_i d\theta_j F(\theta_1,\ldots,\theta_i,\ldots,\theta_j,\ldots,\theta_n)\\ &\quad= \int d\theta_i d\theta_j F(\theta_1,\ldots,\theta_i+\alpha_i,\ldots,\theta_j+\alpha_j,\ldots,\theta_n)\end{aligned} \tag{13.43}$$

である．ここで α_i と α_j は他の 2 つの Grassmann 変数であり，θ_i と θ_j に対して独立であるものとする．

今後，次に示すような標準形の積分が必要になる (式(14.11b))．

$$I_n \equiv \int\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}\tilde{\theta}_i\right) \exp\left(-\sum_{i,j=1}^{n} \theta_i A_{ij} \tilde{\theta}_j\right) \tag{13.44}$$

A_{ij} は任意の数であり，θ_i と $\tilde{\theta}_i$ は 2 つの独立な Grassmann 数 (生成子)，すなわち，

$$[\theta_i, \theta_j]_+ = [\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_j]_+ = [\theta_i, \tilde{\theta}_j]_+ = 0 \tag{13.45}$$

である $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$．式(13.44) における積分要素の順序は，常に次のように取るものとする．

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}\tilde{\theta}_i\right) = \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\tilde{\theta}_1 \mathrm{d}\theta_2 \mathrm{d}\tilde{\theta}_2 \ldots \mathrm{d}\theta_n \mathrm{d}\tilde{\theta}_n \tag{13.46}$$

式(13.44) の積分を評価するために，新たな変数を導入する．

$$\tilde{\eta}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \tilde{\theta}_j, \quad i = 1, \ldots, n \tag{13.47}$$

そうすると，式(13.44) の被積分関数は，次のようになる．

$$\exp\left(-\sum_{i,j=1}^{n} \theta_i A_{ij} \tilde{\theta}_j\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \theta_i \tilde{\eta}_i\right) \tag{13.48}$$

新しい変数 $\tilde{\eta}_i$ も反交換関係，

$$[\tilde{\eta}_i, \tilde{\eta}_j]_+ = [\tilde{\eta}_i, \tilde{\theta}_j]_+ = 0$$

を満たすので，$(\theta_i \tilde{\eta}_i)$ と $(\theta_j \tilde{\eta}_j)$ は交換し，式(13.48) の右辺を分解できる．

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \theta_i \tilde{\eta}_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\theta_i \tilde{\eta}_i} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \theta_i \tilde{\eta}_i\right) \tag{13.49}$$

最後の式の導出には $\theta_i^2 = \tilde{\eta}_i^2 = 0$ を用いた．

$\int \mathrm{d}\theta_i = 0$ なので，被積分関数(13.49) において，積分(13.44) に寄与を持つ唯一の項は，すべての変数 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ を含む項であり，次式を得る．

$$I_n = \int \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\tilde{\theta}_1 \ldots \mathrm{d}\theta_n \mathrm{d}\tilde{\theta}_n (-1)^n (\theta_1 \tilde{\eta}_1) \ldots (\theta_n \tilde{\eta}_n) \tag{13.50}$$

式(13.47) から,

$$\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2\ldots\tilde{\eta}_n = \sum_{\alpha,\beta,\ldots} A_{1\alpha}A_{2\beta}\ldots A_{n\nu}\tilde{\theta}_\alpha\tilde{\theta}_\beta\ldots\tilde{\theta}_\nu$$
$$= \tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_2\ldots\tilde{\theta}_n \sum_{\alpha,\beta,\ldots} \varepsilon_{\alpha\beta\ldots\nu}A_{1\alpha}A_{2\beta}\ldots A_{n\nu}$$
$$= \tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_2\ldots\tilde{\theta}_n \det A_n \tag{13.51}$$

となる．A_n は A_{ij} を要素とする n 次元正方行列を表す．よって式(13.50) は次式になる．

$$I_n = \det A_n \int d\theta_1 d\tilde{\theta}_1 \ldots d\theta_n d\tilde{\theta}_n (-1)^n (\theta_1\tilde{\theta}_1)\ldots(\theta_n\tilde{\theta}_n) \tag{13.52}$$

何故なら，この式における変数 $\tilde{\theta}_1,\ldots,\tilde{\theta}_n$ の順序は，式(13.50) における $\tilde{\eta}_1,\ldots,\tilde{\eta}_n$ の順序と同じになっているからである．反交換関係(13.45) により，次式が得られる．

$$(-1)^n(\theta_1\tilde{\theta}_1)\ldots(\theta_n\tilde{\theta}_n) = (\tilde{\theta}_n\theta_n)\ldots(\tilde{\theta}_1\theta_1)$$

この関係を式(13.52) に代入すると，式(13.41) によって式(13.52) の右辺が 1 になることが分かり，最終的な結果が得られる．

$$I_n \equiv \int \left(\prod_{i=1}^{n} d\theta_i d\tilde{\theta}_i \right) \exp\left(-\sum_{i,j=1}^{n} \theta_i A_{ij}\tilde{\theta}_j \right) = \det A_n \tag{13.53}$$

13.1.3　Grassmann 場

場の量子論では，2 重の汎関数積分,

$$\int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\tilde{\theta}F[\theta,\tilde{\theta}] \tag{13.54}$$

に関心が持たれる．$F[\theta,\tilde{\theta}]$ は 2 つの独立な Grassmann 場 $\theta(x)$ と $\tilde{\theta}(x)$ の汎関数である．これらは 13.1.1 項で論じた古典場に関する積分からの類推に従う形で定義される．これを行うために，形式的に次のように書く．

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i u_i(x), \quad \tilde{\theta}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\theta}_i u_i(x) \tag{13.55}$$

$u_i(x)$ は式(13.2) に従って導入する正規直交関数系，係数 $\theta_1,\theta_2,\ldots$ および $\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\ldots$ は 2 組の互いに独立した無限個の Grassmann 生成子の集合である．級数を第 n 項までで打ち切るならば，汎関数 $F[\theta,\tilde{\theta}]$ は $2n$ 個の生成子の関数に置き換わる．

$$F[\theta,\tilde{\theta}] \;\rightarrow\; F(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n;\,\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\ldots,\tilde{\theta}_n)$$

そして，２重積分を次のように定義できる．

$$\int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\tilde{\theta}\,F[\theta,\tilde{\theta}] \equiv \lim_{n\to\infty}\left(\int\left[\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}\tilde{\theta}_i\right]F(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n;\,\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\ldots,\tilde{\theta}_n)\right) \tag{13.56}$$

一般的な性質として，以下の性質が導かれる．

(i) 線形性：

$$\int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\tilde{\theta}\big(aF[\theta,\tilde{\theta}]+bG[\theta,\tilde{\theta}]\big) = a\int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\tilde{\theta}\,F[\theta,\tilde{\theta}] + b\int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\tilde{\theta}\,G[\theta,\tilde{\theta}] \tag{13.57}$$

ここで a と b は任意の定数である．

(ii) “並進(平行移動)” 不変性：

$$\int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\tilde{\theta}\,F[\theta+\xi,\tilde{\theta}+\tilde{\xi}] = \int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\tilde{\theta}\,F[\theta,\tilde{\theta}] \tag{13.58}$$

ここで $\xi(x)$ と $\tilde{\xi}(x)$ は Grassmann 場で，$\theta(x)$，$\tilde{\theta}(x)$ とは独立である．

２重汎関数積分の定義(13.56) を見ると，式(13.58) が離散的な Grassmann 変数の２重積分の並進不変性(13.43) を一般化したものにあたることは明白である．

実際問題として我々の関心の対象となるのは “Gauss型” の積分だけであり，特に標準的な積分として，

$$\int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\tilde{\theta}\,\mathrm{e}^{-[\theta A\tilde{\theta}]}$$

が重要である．ここでは式(13.6) の表記法を用いている．定義式(13.56) に展開式(13.55) を代入すると，次式が得られる．

$$\int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\tilde{\theta}\,\mathrm{e}^{-[\theta A\tilde{\theta}]} = \lim_{n\to\infty}\int\left(\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}\tilde{\theta}_i\right)\exp\left(-\sum_{i,j=1}^{n}\theta_i A_{ij}\tilde{\theta}_j\right) \tag{13.59}$$

上式の中の行列要素 A_{ij} は，次のように与えられる．

$$A_{ij} = \int \mathrm{d}^4x\int \mathrm{d}^4y\,u_i(x)A(x,y)\,u_j(y) \tag{13.60}$$

式(13.59) を式(13.53) と比較すると，次の結果が得られる．

$$\int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}\tilde{\theta}\,\mathrm{e}^{-[\theta A\tilde{\theta}]} = \det A \tag{13.61}$$

ここで $\det A$ は，行列要素 A_{ij} を持つ n 次元正方行列 A_n の $n\to\infty$ における行列式の極限値である．

13.2 径路積分

第12章では QED の Green 関数を正準形式によって定義し，これを QED の生成汎関数 $Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ と，式(12.91) を通じて関係づけた．

$$G^{\mu\cdots}(x_1,\ldots,y_1,\ldots,z_1,\ldots) = (-1)^{\bar{n}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^n \left.\frac{\delta^n Z[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1)\ldots\delta\bar{\sigma}(y_1)\ldots\delta\sigma(z_1)\ldots}\right|_0 \tag{13.62a}$$

ここで $Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ は，交換しない場の演算子の真空期待値を用いて，式(12.83) によって与えられている．

$$Z[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}] = \frac{\langle 0|S'|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \tag{13.62b}$$

S はS行列(11.40)，S' は源を含めたS行列(12.82) である．式(13.62a)-(13.62b) は理論の本質的な結果を表している．Green 関数から導かれるS行列要素は，理論からのあらゆる予言を与えるからである．

径路積分による場の量子論の定式化へ移行して，同じ結果を得ることも可能である．このアプローチでは，通常は，馴染みのある正準形式による場の量子論から Feynman による径路積分形式の場の量子論を導き，それを一般化して Green 関数の式を得ることになる[2)]．

しかし，我々は Feynman の形式において得られる $Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ に対する径路積分の表式を天下りに引用し，それがすべての摂動次数において第12章で正準形式を用いて導いた式と等価であることを示して，それで満足することにしよう[3)]．この措置には議論が簡潔にすむというだけでなく，2通りの定式化の関係を理解できるという重要な利点がある．$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ に対する径路積分の式を式(13.62a) に代入すると，Green 関数の式が径路積分によって与えられるが，これが径路積分法における応用の出発点になる．

本節では，径路積分形式によって生成汎関数を定義し，その正準形式との等価性を示す．後者の作業は2段構えになる．まず13.2.2項において，もし2つの形式が自由場の場合において等価であれば，相互作用を含む場合にも等価となることを示す．それから13.2.3項と13.2.4項において，自由場に関する両者の等価性を示して証明を完成させる．

[2)]たとえば L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd edn, Cambridge University Press, 1996, Chapter 5-9 を参照．

[3)]この等価性は，摂動論に依らずとも，軸性ゲージを用いて証明することができる．たとえば S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, 1985, Section 5.4 を参照されたい．

13.2.1 生成汎関数

QED の生成汎関数を表す径路積分の式は，次のように与えられる．

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}X'} \tag{13.63a}$$

$$X' = \int \mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\mathrm{I} + \mathcal{L}_\mathrm{S}) \tag{13.63b}$$

$\mathcal{L}_0$ は自由場のラグランジアン密度，$\mathcal{L}_\mathrm{I}$ は相互作用ラグランジアン密度である．

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x)\,(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x) - \frac{1}{2}\big(\partial_\nu A_\mu(x)\big)\big(\partial^\nu A^\mu(x)\big) \tag{13.64}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{I}(x) = e\,\bar{\psi}(x)\,A\!\!\!/(x)\,\psi(x) \tag{13.65}$$

そして $\mathcal{L}_\mathrm{S}$ は，虚構的な源によるラグランジアン密度(12.78) である．

$$\mathcal{L}_\mathrm{S}(x) = J_\kappa(x)\,A^\kappa(x) + \bar{\sigma}(x)\,\psi(x) + \bar{\psi}(x)\,\sigma(x) \tag{13.66}$$

X' は，QED の作用，

$$X = \int \mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\mathrm{I}) \tag{13.67}$$

に対して，源の項 $\mathcal{L}_\mathrm{S}$ による作用を加えたものにあたる．式(13.63a) 以降の式において，多成分場に関する汎関数積分は，すべての成分に関する積分と見なす．たとえば，

$$\int \mathcal{D}A = \prod_{\mu=0}^{3} \mathcal{D}A^\mu \tag{13.68}$$

である．正準形式では $A^\mu(x)$，$\psi(x)$，$\bar{\psi}(x)$ が非可換な演算子であったが，径路積分形式では $A^\mu(x)$ は可換な古典場，$\psi(x)$ と $\bar{\psi}(x)$ は反交換する古典的な Grassmann 場を表す．

式(13.63a) における因子 N^{-1} は，源がないときの生成汎関数が 1 に規格化されるように選ぶ．

$$Z[0,0,0] = 1 \tag{13.63c}$$

よって式(13.63a) により，次のようになる．

$$N = \int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}X} \tag{13.69}$$

$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ の式(13.63a) を，式(13.62a) に代入すると，直ちに Green 関数に対する径路積分の表式が得られる．

$$G^{\mu\cdots}(x_1,\ldots,y_1,\ldots,z_1,\ldots)$$
$$=\frac{1}{N}\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\big\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}X}A^{\mu}(x_1)\ldots\psi(y_1)\ldots\bar{\psi}(z_1)\ldots\big\} \tag{13.70}$$

生成汎関数の式(13.63a)とGreen関数の式(13.70)が，径路積分形式で表現したQEDの基本的な結果である．他の場の理論に対しても，類似の結果が成立する．源を含めた作用を X' とすると，生成汎関数は，すべての場に関する $\exp(\mathrm{i}X')$ の汎関数積分を，適切に規格化したものとして与えられる．第14章では，この方法を応用して，QCDに関するFeynman規則を導く予定である．

13.2.2　自由場と相互作用をする場

2通りの定式化の等価性を確認する作業が残っている．第12章で扱った正準形式による定式化では，生成汎関数 $Z[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]$ の式(13.62b)を出発点として，これを自由場の生成汎関数 $Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]$ (式(12.110a-c))によって表す式(12.121)を得た．本節では同じ式(12.121)が径路積分形式においても成立することを示す．そうすると問題は自由場の生成汎関数の等価性の問題に還元されるが，その問題を後に続く13.2.3項と13.2.4項において扱う．

源の寄与を含んだ作用 X' (式(13.63b))に関する議論から始める．まず，次式が成立することを，直接に証明できる．

$$eI_\delta(x)\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_\mathrm{S})\right\}=\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_\mathrm{S})\right\} \tag{13.71}$$

$I_\delta(x)$ は“相互作用演算子”(12.119)である．この関係から，次式は明らかである[4)]．

$$\exp\left\{\mathrm{i}e\int\mathrm{d}^4x\,I_\delta(x)\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_\mathrm{S})\right\}$$
$$=\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_\mathrm{S})\right\}$$
$$=\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_\mathrm{I}+\mathcal{L}_\mathrm{S})\right\}=e^{\mathrm{i}X'} \tag{13.72}$$

上の第1式を，式(13.63a)の $e^{\mathrm{i}X'}$ として代入すると，次式を得る．

$$Z[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]=\frac{1}{N}\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\exp\left\{\mathrm{i}e\int\mathrm{d}^4x\,I_\delta(x)\right\}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_\mathrm{S})\right\} \tag{13.73}$$

---

4) この結果を得るために $\mathcal{L}_0$，$\mathcal{L}_\mathrm{I}$，$\mathcal{L}_\mathrm{S}$ が互いに可換であることを用いた．これらは古典場とGrassmann場の双一次量だけしか含まないからである．したがって A と B が可換の場合に成立する $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B=\mathrm{e}^{(A+B)}$ という恒等関係を利用できる．

この式の最初の指数関数は，場 A^μ，ψ，$\bar{\psi}$ に依存しないので，これを積分の外に出すと，式(13.73) を次のように書ける.

$$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_{\rm I}} \exp\left\{ {\rm i}e \int {\rm d}^4x\, I_\delta(x) \right\} Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] \tag{13.74}$$

ここで Z_0 は次のように与えられる.

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = \frac{1}{N_0} \int \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, \mathcal{D}\psi \, \exp\left({\rm i}X'_0\right) \tag{13.75a}$$

$$X'_0 = \int {\rm d}^4x\, (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\rm S}) \tag{13.75b}$$

定数 N_0 は，規格化条件，

$$Z_0[0, 0, 0] = 1 \tag{13.75c}$$

により，

$$N_0 = \int \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, \mathcal{D}\psi \, \exp\left\{ {\rm i} \int {\rm d}^4x\, \mathcal{L}_0 \right\} \tag{13.76}$$

となる．式(13.74), (13.75a), (13.73) により，次の関係が得られる.

$$N_{\rm I} = \frac{N}{N_0} \tag{13.77}$$

式(13.74) における指数関数は，自由場の生成汎関数の $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ に作用して，これを相互作用をする場の生成汎関数 $Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ に変換する．指数関数を級数展開すると，$Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ に対する e の冪(べき)による摂動級数が得られる.

ここから我々は，正準形式と径路積分形式によって得た生成汎関数 $Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ の式(12.121) と (13.74) が同じものであることを示せる．両方において $Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ は同じ規格化条件 $Z[0, 0, 0] = 1$ を満たす (式(12.84)および式(13.63c))．したがって，もし自由場の生成汎関数 $Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ が正準形式と径路積分形式で同じであれば，相互作用を持つ系の生成汎関数 $Z[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ も同じになるはずである．式(13.75) を見ると，$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}]$ を，

$$Z_0[J_\kappa, \sigma, \bar{\sigma}] = Z_0[J_\kappa]\, Z_0[\sigma, \bar{\sigma}] \tag{13.78}$$

のように分解できる．$Z_0[J_\kappa]$ は自由な電磁場の生成汎関数，$Z_0[\sigma, \bar{\sigma}]$ は自由なスピノル場の生成汎関数である．式(13.75a-c) から以下の結果を得る．自由電磁場については，

$$Z_0[J_\kappa] = \frac{1}{N_1}\int \mathcal{D}A\exp\Big\{\mathrm{i}X[J_\kappa]\Big\} \tag{13.79a}$$

$$X[J_\kappa] = \int \mathrm{d}^4x\Big\{-\frac{1}{2}\big(\partial_\nu A_\mu(x)\big)\big(\partial^\nu A^\mu(x)\big) + J_\kappa(x)A^\kappa(x)\Big\} \tag{13.79b}$$

であり，定数 N_1 は，次の規格化条件から決まる．

$$Z_0[J_\kappa = 0] = 1 \tag{13.79c}$$

自由スピノル場については，

$$Z_0[\sigma,\bar{\sigma}] = \frac{1}{N_2}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\Big\{\mathrm{i}X[\sigma,\bar{\sigma}]\Big\} \tag{13.80a}$$

$$X[\sigma,\bar{\sigma}] = \int \mathrm{d}^4x\Big\{\bar{\psi}(x)\,(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x) + \bar{\sigma}(x)\,\psi(x) + \bar{\psi}(x)\,\sigma(x)\Big\} \tag{13.80b}$$

であり，N_2 は次の規格化条件から決まる．

$$Z_0[\sigma=0,\ \bar{\sigma}=0] = 1 \tag{13.80c}$$

次に続く 13.2.3 項と 13.2.4 項では，これらの自由場生成汎関数 $Z_0[J_\kappa]$ と $Z_0[\sigma,\bar{\sigma}]$ が正準形式と径路積分形式で同じであることを確認し，２つの形式の等価性の証明を完了することにする．

13.2.3　自由な電磁場

自由な電磁場の生成汎関数 (13.79a) を評価するために，まず，作用の式 (13.79b) を変換する．次の式，

$$\int \mathrm{d}^4x\big(\partial_\nu A_\mu(x)\big)\big(\partial^\nu A^\mu(x)\big) = -\int \mathrm{d}^4x\,A_\mu(x)\,\Box_x A^\mu(x) \tag{13.81}$$

を，式 (13.79b) に代入すると，次式を得る．

$$X[J_\kappa] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x A_\mu(x)\,\Box_x A^\mu(x) + \int \mathrm{d}^4x\,J_\kappa(x)A^\kappa(x) \tag{13.82}$$

対称な波動演算子 $K^{\mu\nu}$ を定義しておく．

$$K^{\mu\nu}(x,x') = \Big\{-g^{\mu\nu}\delta^{(4)}(x-x')\,\Box_{x'}\Big\} \tag{13.83}$$

これは，次のような関係式において利用できる．

$$\int \mathrm{d}^4x\,A_\mu(x)\int \mathrm{d}^4x'\Big\{-g^{\mu\nu}\delta^{(4)}(x-x')\,\Box_{x'}\Big\}A_\nu(x') = -\int \mathrm{d}^4x\,A_\mu(x)\,\Box_x A^\mu(x) \tag{13.84}$$

上式を式(13.82)に代入すると，次式が得られる．

$$X[J_\kappa] = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x'\,A_\mu(x)\,K^{\mu\nu}(x,x')\,A_\nu(x') + \int \mathrm{d}^4x\,J_\kappa(x)\,A^\kappa(x) \tag{13.85}$$

式(13.85)は，13.1.1項の式(13.24)と同じ形をしている．したがって13.1.1項と同じ方法で，式(13.24)から式(13.33)までの導出を再現できる．この類似性があるので，導出の概要だけを以下に示し，詳細は読者に委ねることにする．

波動演算子の逆演算子 $K^{-1}_{\nu\tau}(x',x'')$ と，シフトした場 $A'_\mu(x)$ を，次のように定義する．

$$\int \mathrm{d}^4x'\,K^{\mu\nu}(x,x')\,K^{-1}_{\nu\tau}(x',x'') = g^\mu_\tau\,\delta^{(4)}(x-x'') \tag{13.86}$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \int \mathrm{d}^4x'\,K^{-1}_{\mu\nu}(x,x')\,J^\nu(x') \tag{13.87}$$

これらの式を利用すると，$X[J_\kappa]$ の式(13.85)が次のように書き直される．

$$X[J_\kappa] = \frac{1}{2}[J^\kappa K^{-1}_{\kappa\lambda}\,J^\lambda] - \frac{1}{2}[A'_\mu K^{\mu\nu}A'_\nu] \tag{13.88}$$

これは13.1.1項の式(13.24)から式(13.29)の導出に対応する．自由電磁場の生成汎関数(13.79a)は，

$$Z_0[J_\kappa] = \frac{1}{N_1}\int \mathcal{D}A\,\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\left[J^\kappa K^{-1}_{\kappa\lambda}\,J^\lambda\right] - \frac{\mathrm{i}}{2}\left[A'_\mu K^{\mu\nu}A'_\nu\right]\right\} \tag{13.89}$$

となり，さらに次式へ変換される．

$$Z_0[J_\kappa] = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\left[J^\kappa K^{-1}_{\kappa\lambda}\,J^\lambda\right]\right\} \tag{13.90}$$

(規格化条件(13.79c)を課した．) これは式(13.30)から式(13.33)の導出に対応する．

波動演算子の逆演算子 $K^{-1}_{\nu\tau}(x',x'')$ を決めなければならない．これをFourier変換の形に書く．

$$K^{-1}_{\nu\tau}(x',x'') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,D_{\nu\tau}(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x'-x'')} \tag{13.91}$$

式(13.91)，式(13.83)，および δ 関数をFourier変換表示した式を，式(13.86)に代入すると，直ちに次式が与えられる．

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \tag{13.92}$$

残念ながら，これは k^0 の実軸上の $k^0 = \omega_k \equiv |\boldsymbol{k}|$ のところに極を持っており，式(13.91) の k^0 に関する積分も，そこから導かれるべき生成汎関数(13.90) も，極の扱い方を決めなければ適正に定義された量にはならない．

ここで読者に，正準形式において生成汎関数(12.106) を求める際にも，式(12.101) の適切な解 $\Delta^{\mu\nu}(x-x')$ の選択に対応する同様の曖昧さがあったことを思い出してもらいたい．式(12.106) のところで論じたように，この曖昧さは，生成汎関数が正しい自由光子伝播関数(5.26)-(5.27) を導くべきであるという要請によって解消された．ここでも同じ要請を課すために，k^0-積分を複素面の閉路積分と解釈し，極を実軸からずらすために，式(13.92) を，

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{13.93}$$

と修正する必要がある．この式を式(13.91) に代入して，得られる式を式(5.27) の Feynman 光子伝播関数 $D_{\mathrm{F}\mu\nu}(x-x')$ と比べると，

$$K^{-1}_{\mu\nu}(x,x') = -D_{\mathrm{F}\mu\nu}(x-x') \tag{13.94}$$

という関係が判明し，生成汎関数(13.90) は次式で表される．

$$Z_0[J_\kappa] = \exp\left\{\frac{-\mathrm{i}}{2}\left[J^\kappa D_{\mathrm{F}\kappa\lambda} J^\lambda\right]\right\} \tag{13.95}$$

これは正準形式による式(12.110b) と同じ式になっている．より厳密な方法として，まず生成汎関数を“虚時間”$x^0 = \mathrm{i}x^4$ (x^4 は実数) によって定義して，曖昧さのない形で評価してから，その結果を実時間 x^0 へ解析接続しても，やはり式(13.95) と同じ結果が得られる[5])．

13.2.4 自由なスピノル場

生成汎関数 $Z_0[\sigma,\bar{\sigma}]$ (式(13.80a-c)) を評価する方法は，$Z_0[J_\kappa]$ の場合とよく似ている．したがって導出の要点だけを示し，詳細は読者に委ねる．式(13.80b) の作用 $X[\sigma,\bar{\sigma}]$ を変換する．

$$X[\sigma,\bar{\sigma}] = \int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x'\,\bar{\psi}(x)\,K(x,x')\,\psi(x) + \int \mathrm{d}^4x\left\{\bar{\psi}(x)\sigma(x) + \bar{\sigma}(x)\psi(x)\right\} \tag{13.96}$$

---

5) たとえば D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Theories*, Rev. edn, Institute of Physics Publishing Ltd. (1993), Section 4.2 を参照.

ここで対称な波動演算子 $K(x,x')$ を次のように定義している.

$$K(x,x') = \delta^{(4)}(x-x')(\mathrm{i}\partial\!\!\!/_{x'} - m) \tag{13.97}$$

その逆演算子 $K^{-1}(x',x'')$ を,

$$\int \mathrm{d}^4x'\, K(x,x')\, K^{-1}(x',x'') = -\delta^{(4)}(x-x'') \tag{13.98}$$

によって定義し, シフトした場を次のように定義する.

$$\psi'(x) = \psi(x) - \int \mathrm{d}^4x'\, K^{-1}(x,x')\sigma(x') \tag{13.99a}$$

$$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) - \int \mathrm{d}^4x'\, \bar{\sigma}(x')K^{-1}(x',x) \tag{13.99b}$$

そうすると, 式(13.80b) の $X[\sigma,\bar{\sigma}]$ がシフトした場によって表される. 式(13.80a) を利用すると, 次式が得られる.

$$Z_0[\sigma,\bar{\sigma}] = \exp\left\{\mathrm{i}\left[\bar{\sigma}K^{-1}\sigma\right]\right\} \tag{13.100}$$

波動演算子の逆演算子 $K^{-1}(x,x')$ を決めるために, 次のように書く.

$$K^{-1}(x',x'') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\, S(p)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x'-x'')} \tag{13.101}$$

これと式(13.97) を式(13.98) に代入すると, 次式を得る.

$$S(p) = -\frac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2} \tag{13.102}$$

この式は $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ に特異点を持つ. この曖昧さは, 生成汎関数(13.80a) が正しい自由フェルミオン伝播関数を導くという条件によって解消される. このためには p^0-積分を複素面内の閉路積分と解釈し, 極を実軸から無限小だけずらすために, 式(13.102) を,

$$S(p) = -\frac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{13.103}$$

に修正すればよい. フェルミオン伝播関数の定義式(7.23a) と (7.24a) および式(13.101) から, 次の関係を得る.

$$K^{-1}(x,x') = -S_{\mathrm{F}}(x-x') \tag{13.104}$$

そして式(13.100) により, 自由スピノル場の生成汎関数の最終的な式が得られる.

$$Z_0[\sigma,\bar{\sigma}] = \exp\left\{-\mathrm{i}\left[\bar{\sigma}S_{\mathrm{F}}\sigma\right]\right\} \tag{13.105}$$

この結果は，正準形式によって得た式(12.110c)と同じである．

これで径路積分形式によって得た生成汎関数 $Z_0[J_\kappa]$ と $Z_0[\sigma,\bar{\sigma}]$，およびその結果として自由場生成汎関数 $Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]$ が，正準形式で得た結果(式(12.110a-c))と同じであることが証明された．13.2.1項において論じたように，ここから相互作用のある系の生成汎関数 $Z[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]$ も，径路積分形式と正準形式において同じであることが結論づけられる．

13.3 摂動論

13.2節において，QEDの生成汎関数を式(13.74)-(13.75)の形に表し，径路積分形式と正準形式が摂動のすべての次数において等価であることを確認した．しかしながら，通常の応用のためには，摂動論を相互作用を持つ系のGreen関数自体へ直接に適用して，自由場のGreen関数による級数に展開した方が問題がはるかに簡単になる．本節では，これを行う方法を径路積分形式の下で説明する．まずは自由場のGreen関数が正準形式の下で用いたWickの定理(12.16a)と同じ形によって表現できることを示そう．

13.3.1 Wickの定理

相互作用する場のGreen関数を，次のように表記すると便利である．

$$\langle A^\mu(x_1)\ldots\psi(y_1)\ldots\bar{\psi}(z_1)\ldots\rangle \equiv G^{\mu\cdots}(x_1,\ldots,y_1,\ldots z_1,\ldots) \tag{13.106}$$

ここで $G^{\mu\cdots}(x_1,\ldots,y_1,\ldots z_1,\ldots)$ は，正準形式の式(13.62a)か，もしくは径路積分形式の式(13.70)によって与えられる．これに対応する自由場のGreen関数は $\langle A^\mu(x_1)\ldots\psi(y_1)\ldots\bar{\psi}(z_1)\ldots\rangle_0$ と表記され，これを得るには，式(13.78), (13.95), (13.105)から与えられる自由場生成汎関数 $Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]$ を，一般式(13.62a)に代入するのが最も容易である．

$$\begin{aligned}&\langle A^\mu(x_1)\ldots\psi(y_1)\ldots\bar{\psi}(z_1)\ldots\rangle_0\\&\quad=(-1)^{\bar{n}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^n\left.\frac{\delta^{(n)}Z_0[J_\kappa,\sigma,\bar{\sigma}]}{\delta J_\mu(x_1)\ldots\delta\bar{\sigma}(y_1)\ldots\delta\sigma(z_1)\ldots}\right|_0\end{aligned}$$

注意を促しておくと，左辺の $\langle\ \rangle_0$ の添字0は自由場Green関数を意味し，右辺の $|_0$ の添字0は汎関数微分の後で源をゼロにするという意味である．汎関数微分によってすべての源の項(最終的にゼロにする)が除かれない限り，自由場Green関数

$\langle A^{\mu}(x_1)\ldots\psi(y_1)\ldots\bar{\psi}(z_1)\ldots\rangle_0$ はゼロになる．たとえば，

$$\langle A^{\nu}(y)\rangle_0 = \frac{1}{\mathrm{i}}\,Z_0[\sigma,\bar{\sigma}]\,\frac{\delta Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\nu(y)}\bigg|_0 = 0$$

であるが，これは，

$$Z_0[J_\kappa] = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\left[J^{\kappa}D_{\mathrm{F}\kappa\lambda}J^{\lambda}\right]\right\}$$

であって，

$$\frac{\delta Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\nu(y)} = \exp\left\{\frac{-\mathrm{i}}{2}\left[J^{\kappa}D_{\mathrm{F}\kappa\lambda}J^{\lambda}\right]\right\}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)\frac{\delta}{\delta J_\nu(y)}\left[J^{\kappa}D_{\mathrm{F}\kappa\lambda}J^{\lambda}\right]$$

となるからである．汎関数微分の後に源 J が残るので，これをゼロにすると Green 関数もゼロになる．最後の式を利用して，さらに 2 点 Green 関数を得ることもできる．

$$\begin{aligned}\langle A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)\rangle_0 &= \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^2\frac{\delta^2 Z_0[J_\kappa]}{\delta J_\mu(x)\,\delta J_\nu(y)}\bigg|_0\\ &= \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^2\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)\frac{\delta^2}{\delta J_\mu(x)\,\delta J_\nu(y)}\left[J^{\kappa}D_{\mathrm{F}\kappa\lambda}J^{\lambda}\right]\bigg|_0\\ &= \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x-y) = \underbrace{A^{\mu}(x)A^{\nu}(y)}\end{aligned}$$

他の結果も同様の方法で得られるので，結果を以下に簡単にまとめる．まず，

$$\langle\psi(x)\rangle_0 = \langle\bar{\psi}(x)\rangle_0 = 0$$

であることは直ちに分かる．2 点 Green 関数については，

$$\langle AB\rangle_0 = \underbrace{AB} \tag{13.107}$$

となる．ここで A, B は任意の演算子 A^{μ}, ψ, $\bar{\psi}$ を表す．QED においてゼロにならない縮約は，光子伝播関数 $\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x)$ とフェルミオン伝播関数 $\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\alpha\beta}(x)$ だけである (式 (12.17))．

さらに複雑な自由場 Green 関数 $\langle ABCD\ldots WXYZ\rangle_0$ は，場の演算子 $AB\ldots YZ$ が奇数個の場合にはゼロになる．演算子が偶数個ならば，次のようになる．

$$\begin{aligned}&\langle ABCD\ldots WXYZ\rangle_0\\ &= \underbrace{AB}\,\underbrace{CD}\cdots\underbrace{WX}\,\underbrace{YZ} + \underbrace{A\underbrace{BC}D}\cdots\underbrace{WX}\,\underbrace{YZ} + \ldots\end{aligned} \tag{13.108}$$

右辺の和には，全演算子 $ABC\ldots$ が余さず対（つい）になってゼロでない縮約を形成するような可能な項がすべて含まれる．これはT積の真空期待値 $\langle 0|\mathrm{T}(ABCD\ldots WXYZ)|0\rangle$ に Wick の定理を適用した結果(12.16a) と同じ結果である．正準形式の場合と同様に，帰納法による証明は省略する．式(13.70) において $\mathcal{L}_\mathrm{I}=0$ と置いて，自由場Green関数を汎関数積分の形で与えると，

$$\langle ABC\ldots\rangle_0 = \frac{1}{N_0}\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}X_0}(ABC\ldots) \tag{13.109}$$

$$X_0 = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_0(x) \tag{13.110}$$

となる．N_0 は式(13.76) によって与えられる．式(13.109) は自由場Green関数を汎関数積分として表した式である．この自由場Green関数の解釈と併せて，式(13.108) は汎関数積分に対する Wick の定理と見なされる．これが自由場Green関数に関する最終的な結果である．任意の自由場Green関数を，光子伝播関数 $\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(x)$ と $\mathrm{i}S_{\mathrm{F}\alpha\beta}(x)$ だけによって表すことができるのである．

13.3.2　相互作用

相互作用をする場の Green 関数の評価は，これを摂動的に自由場Green関数と関係づけて，後者を Wick の定理によって計算することによって最も簡便に行うことができる．式(13.106) の表記法を用いて，式(13.70) を次のように書く．

$$\langle ABC\ldots\rangle = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}X}(ABC\ldots) \tag{13.111}$$

ここで X は，式(13.67) と式(13.110) により，

$$X = X_0 + \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x) \tag{13.112}$$

である．X_0 と $\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)$ は交換するので，次式を得る．

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}X} = \exp\left\{\mathrm{i}X_0 + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}X_0}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}$$

したがって，式(13.111) を次のように書き直せる．

$$\langle ABC\ldots\rangle = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}X_0}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}(ABC\ldots)$$

この式と，式(13.109)を比較すると，次式が得られる．

$$\langle ABC\dots\rangle=\frac{N_0}{N}\left\langle\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}(ABC\dots)\right\rangle_0$$

式(13.69)から，同様にして次式を得る．

$$N=N_0\left\langle\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}\right\rangle_0$$

上の2本の式を組み合わせると，次の一般式が得られる．

$$\langle ABC\dots\rangle=\frac{\left\langle\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}(ABC\dots)\right\rangle_0}{\left\langle\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}\right\rangle_0}\tag{13.113}$$

式(13.113)において，次のように指数関数を級数展開すると，Green関数の摂動展開の式が導かれる．

$$\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{n!}\int\mathrm{d}^4x_1\dots\mathrm{d}^4x_n\left\{\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_1)\dots\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_n)\right\}\tag{13.114}$$

式(13.113)および式(13.114)は，それぞれ正準形式において対応する式(12.8)および式(12.11)とよく似た関係になっている．正準形式では12.2.2項と12.2.3項で見たように，式(12.8)の分母が分子の摂動展開から現れる非連結の真空ダイヤグラムの部分を相殺するので，“連結Green関数”を計算する際にはこれらを無視してよい．同じ結果は式(13.113)にも当てはまるので，連結Green関数を計算するときに，分母と分子の真空部分を無視してよい．

径路積分形式における摂動計算の例として，Green関数 $\langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\rangle$ を考える．式(13.113)を分母を無視して用いると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\rangle&=\left\langle\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\right\rangle_0\\&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\langle\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\rangle_0\end{aligned}$$

上式では，$\mathcal{L}_\mathrm{I}$ のゼロ次の項に対して，次の関係を用いた．

$$\langle A^\mu(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\rangle_0=\langle A^\mu(x_1)\rangle_0\langle\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\rangle_0=0$$

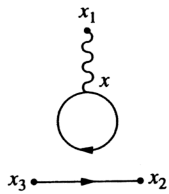


図13.1　Green関数 $\langle A^{\mu}(x_1)\,\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_3)\rangle$ に関わる非連結ダイヤグラム．式(13.117)の第2項を式(13.115)に代入すると得られる．

これは $\langle A^{\mu}(x_1)\rangle_0 = 0$ による．ここでは $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)$ の1次項までを考え，2次以上の高次項は無視してある．$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)$ の式(13.65)を代入すると，次のようになる．

$$\langle A^{\mu}(x_1)\,\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_3)\rangle = \mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x\,F \tag{13.115}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle[\bar{\psi}(x)\,\gamma_{\nu}\,\psi(x)]\,A^{\nu}(x)\,A^{\mu}(x_1)\,\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_3)\rangle_0 \\ &= \langle A^{\mu}(x_1)\,A^{\nu}(x)\,\psi(x_2)\,[\bar{\psi}(x)\,\gamma_{\nu}\,\psi(x)]\,\bar{\psi}(x_3)\rangle_0 \end{aligned} \tag{13.116}$$

式(13.116)の1行目から2行目への移行は，フェルミオン演算子同士の入れ換えが偶数回で達成されるので，符号の変更が生じない．そして矩形括弧の中の因子がそのまま保たれているので，表記を省略しているフェルミオン添字を気にする必要はない．Wickの定義(13.108)によって，次式が得られる．

$$\begin{aligned} F &= \underbrace{A^{\mu}(x_1)\,A^{\nu}(x)}\,\underbrace{\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x)}\,\gamma_{\nu}\,\underbrace{\psi(x)\,\bar{\psi}(x_3)} \\ &\quad + \underbrace{A^{\mu}(x_1)\,A^{\nu}(x)}\,\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x)\,\gamma_{\nu}\,\psi(x)\,\bar{\psi}(x_3) \end{aligned} \tag{13.117}$$

（第2項では $\psi(x_2)$ と $\bar{\psi}(x_3)$，$\bar{\psi}(x)$ と $\psi(x)$ がそれぞれ縮約されている．）

式(3.117)の第2項を式(3.115)に代入すると，図13.1に示す非連結ダイヤグラムに対応する振幅になり，これは連結Green関数の計算では省いてよい．式(13.117)の第1項を式(13.115)に代入して，縮約を適切な伝播関数因子(12.17)で置き換えると，相互作用 $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x)$ の1次までの計算結果として，次式を得る．

$$\langle A^{\mu}(x_1)\,\psi(x_2)\,\bar{\psi}(x_3)\rangle = \mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(x_1-x)\,\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x_2-x)\,\gamma_{\nu}\,\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(x-x_3) \tag{13.118}$$

これは図13.2のダイヤグラムに対応し，正準形式における結果と一致している．次章では，本章でこれまで見てきた径路積分形式を利用して，QCDに関するFeynman規則を調べる予定である．

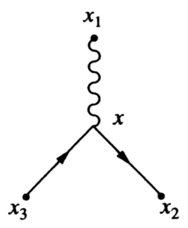


図13.2　連結Green関数 $\langle A^\mu(x_1)\,\psi(x_2)\,\bar\psi(x_3)\rangle$ への1次の寄与 (式(13.118)).

13.4　ゲージ独立な量子化？

自由な電磁場は，式(5.8)において $s_\mu(x)=0$ と置いたゲージ不変なラグランジアン密度，

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x) \tag{13.119}$$

によって記述される．5.1節で論じたように，スカラーポテンシャル $A^0(x)$ に共役な場が含まれないために，これを正準形式で量子化することはできない．この理由から，ここまで式(5.13)によって定義されるLorentzゲージを採用してきた．しかし複雑なQCDの量子化を考察する前に，ゲージ不変なラグランジアン密度(13.119)を径路積分法によって量子化できるかどうかを調べておくことは教育的である．これを行うために，単純に，ラグランジアン密度(13.119)に対応する次の生成汎関数から，径路積分による評価を試みる (式(13.79)と比較せよ).

$$Z_0[J_\kappa]=\frac{1}{N_Z}\int\mathcal{D}A\,\exp\bigl\{\mathrm{i}X[J_\kappa]\bigr\} \tag{13.120a}$$

$$X[J_\kappa]=\int\mathrm{d}^4x\Bigl\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x)+J_\lambda(x)\,A^\lambda(x)\Bigr\} \tag{13.120b}$$

規格化条件は，通例に従う．

$$Z_0[J_\kappa=0]=1 \tag{13.120c}$$

ここで行う議論は，13.2.3項においてLorentzゲージで電磁場の生成汎関数を評価した際の議論とよく似ている．次式を利用する (式(13.81)参照).

$$-\frac{1}{4}\int\mathrm{d}^4x\,F_{\mu\nu}(x)\,F^{\mu\nu}(x)=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\,A^\mu(x)\bigl[g_{\mu\nu}\Box_x-\partial_\mu\partial_\nu\bigr]A^\nu(x)$$

すると，式(13.85)と同様に，作用(13.120b)を次の形に書ける．

$$X[J_\kappa] = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^4x'\, A_\mu(x)\, K^{\mu\nu}(x,x')\, A_\nu(x') + \int \mathrm{d}^4x\, J_\kappa(x)\, A^\nu(x)$$

積分核 $K^{\mu\nu}(x,x')$ は，ここでは式(13.83)の代わりに次式で与えられる．

$$K^{\mu\nu}(x,x') = -\delta^{(4)}(x-x')\left[g_{\mu\nu}\Box_{x'} - \partial'_\mu\partial'_\nu\right] \tag{13.121}$$

表記法として $\partial'_\mu = \partial/\partial x'_\mu$ などを用いている．式(13.85)から式(13.90)を導いた議論を，ここでも行うことができる．よって，

$$Z_0[J_\kappa] = \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{2}\left[J^\tau K^{-1}_{\tau\lambda} J^\lambda\right]\right\} \tag{13.122}$$

となる．$K^{-1}_{\tau\lambda}(x,x')$ は，式(13.86)を通じて，積分核(13.121)から定義される逆演算子である．

波動演算子の逆演算子 $K^{-1}_{\tau\lambda}(x,x')$ を決めなければならない．このために，式(13.91)を式(13.86)に代入して式(13.121)を用いると，次式を得る．

$$\left(g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu\right) D_{\nu\tau}(k) = g^\mu_\tau \tag{13.123}$$

$D_{\nu\tau}(k)$ は，式(13.91)によって定義される $K^{-1}_{\nu\tau}(x,x')$ の Fourier 変換である．他方において，$D_{\nu\tau}(k)$ は4元ベクトル k^μ だけに依存する Lorentz テンソルである．k^μ によって作ることのできるスカラーは k^2 に限られるので，このようなテンソルの最も一般的な形は，

$$D_{\nu\tau}(k) = a(k^2)\, g_{\nu\tau} + b(k^2)\, k_\nu k_\tau \tag{13.124}$$

と与えられる．$a(k^2)$ と $b(k^2)$ は任意のスカラー関数である．式(13.124)を式(13.123)に代入すると，式(13.124)が解になり得ず，生成汎関数(13.120)を定義できないことが容易に分かる．正準形式の場合と同様に，径路積分形式においても“ゲージ固定”を行わない限り，電磁場を矛盾なく量子化に導くことはできない．

練習問題

13.1 連結 Green 関数 $\langle A^\mu(x_1)\, A^\nu(x_2)\, \psi(x_3)\, \bar{\psi}(x_4)\rangle$ への2次の寄与を，13.3.2項の方法で評価し，対応する座標空間の Feynman ダイヤグラムを描け．

13.2 質量を持つスピン1の中性ベクトルボゾンは，次のラグランジアン密度によって記述される．

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x)\, F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} m^2 A_\mu(x)\, A^\mu(x) \tag{13.125}$$

m は質量，$A^\mu(x)$ は実４元ベクトル場であり，場のテンソル $F^{\mu\nu}(x)$ は通例に従い，式(5.5) によって与えられる．

これに対応する運動方程式が，次の Proca方程式になることを示せ．

$$\Box A^\mu(x) - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) + m^2 A^\mu(x) = 0$$

生成汎関数 $Z_0[J_\kappa]$ は，式(13.120) において，

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \;\to\; -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu(x)A^\mu(x)$$

のように置き換えを施した式によって与えられる．次の結果を示せ．

$$Z_0[J_\kappa] = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\left[J^\kappa D_{\mathrm{F}\kappa\lambda}J^\lambda\right]\right\}$$

ただし，伝播関数は次のようになる．

$$D_{\mathrm{F}\kappa\lambda}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\, D_{\mathrm{F}\kappa\lambda}(k)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x'-x'')}$$

$$D_{\mathrm{F}}^{\kappa\lambda}(k) = \frac{-g^{\kappa\lambda} + k^\kappa k^\lambda/m^2}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

第 14 章　量子色力学

量子色力学は強い相互作用を記述する標準的な理論であり，すでに11.2節で導入してある．しかし11.2節で与えたゲージ不変なラグランジアン密度(11.35)は量子化に適していないので，量子化が可能で摂動論に適した等価的なラグランジアンを見出す必要がある．このラグランジアンの適正な形を最初に推定したのはde Witt（ド・ウィット）であるが，その後でFaddeev（ファデエフ） and Popov（ポポフ）が径路積分による量子化法を用いて同じ結果を再現した．ここでは後者の議論を概説する[1)]．

QCDを量子化する際の問題はもっぱらグルーオン場に関係するので，最初にクォーク場を除いたグルーオン場だけの力学を論じるのが好都合である．Faddeev-Popovの手続きを，この文脈において14.1節で導入し，14.2節でその理論をクォークまで含めるように一般化する．その後にQCDの摂動論とFeynman規則を14.3節と14.4節において展開する．そして章末の14.5節において，この理論の繰り込み可能性を論じることにする．

14.1　グルーオン場

クォークのない系を考えると，グルーオン場はゲージ不変なラグランジアン密度(11.33)-(11.34)によって記述される．

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu}(x) G_i^{\mu\nu}(x) \tag{14.1}$$

$$G_i^{\mu\nu}(x) = F_i^{\mu\nu}(x) + g_s f_{ijk} A_j^\mu(x) A_k^\nu(x) \tag{14.2}$$

ゲージ不変な電磁場のラグランジアン密度と同様に，このラグランジアン密度も量子化には適さない．本節では，まず14.1.1項で量子化が可能なラグランジアン密度を見出す際に遭遇する問題点を概説し，それから14.1.2-5項において，この問題を径路積分法によって克服する方法を示す．

---

1) 正準形式によるゲージ場理論への系統的なアプローチはT. Kugo(九後) and I. Ojima(小嶋), *Prog. Theor. Phys.* **60** (1978) 1869; *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **66** (1979) 1. において与えられている．(p.293脚註参照．)

14.1.1 生成汎関数

ゲージ不変なラグランジアン密度 (14.1) に対応する生成汎関数から議論を始める．これは標準的な形を持つ．

$$Z[J_{i\kappa}] = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}X[J_{i\kappa}]} \tag{14.3a}$$

ここで源を表す古典場 $J_{i\kappa}(x)$ $(i=1,2,\ldots,8)$ は，各グルーオン場 $A_i^\kappa(x)$ に関係しており，源を含んだ作用は，

$$X[J_{i\kappa}] = \int \mathrm{d}^4x\,\big(\mathcal{L}_G + J_{i\kappa}(x)\,A_i^\kappa(x)\big) \tag{14.3b}$$

である．$\mathcal{L}_G$ は式(14.1) で与えられる．汎関数積分は，8種類のグルーオン場のそれぞれの成分すべてについて実施する．すなわち，

$$\mathcal{D}A \equiv \prod_{i=1}^{8}\prod_{\mu=0}^{3}\mathcal{D}A_i^\mu(x) \tag{14.4}$$

という意味になる．規格化定数は，次の規格化条件によって決まる．

$$Z[J_{i\kappa}=0] = 1 \tag{14.3c}$$

相互作用がない場合には，$G_i^{\mu\nu}(x)$ が $F_i^{\mu\nu}(x)$ に帰着し，ラグランジアン密度(14.1) は，単に電磁場の密度(13.119) と同じ形の，

$$-\frac{1}{4}\,F_{i\mu\nu}(x)\,F_i^{\mu\nu}(x) \tag{14.5}$$

という項の和になる．この場合には生成汎関数(14.3) が，13.4節で論じた自由な電磁場の式(13.120) をそのまま一般化したものになり，やはり適正に定義された量にはならない．

この時点では，各グルーオン場 $A_i^\mu(x)$ に対して Lorentz条件，

$$\partial_\mu A_i^\mu(x) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,8 \tag{14.6}$$

を課して，13.2.3項で示した電磁場の取扱いからの類推で議論を進めることが有望のように思われる．しかし残念ながら，この方法は適正ではない．QED の場合には，任意の古典場 $A^\mu(x)$ に対して，変換後のポテンシャルが Lorentz条件を満たすようなゲージ変換を常に見出すことができた．このことの証明 (式(5.13)の後) は，電磁場のゲージ変換が単純な形(5.7) に従うことに依拠したものであり，これを QCD の複雑なゲージ変換(11.26b) の場合へ一般化することはできない．一般的に Lorentz条

件(14.6)を課すことは不可能であり，無理にLorentz条件を設定しても，相互作用を考える際に矛盾が生じてくる．

上述のことを具体的に確認する代わりに，経路積分形式によって，何らかのゲージ固定を行わないと生成汎関数(14.3)を適正に定義できないという自然な理由づけがなされることを指摘しておこう．第1章のCoulombゲージの議論で強調したように[2]，電磁場においては4成分のうち2つの横波成分だけが独立な力学変数である．また，生成汎関数(14.3)を定義する際には，各グルーオン場 $A_i^\mu(x)$ $(i=1,2,\ldots,8)$ に関してすべて4成分 $\mu=0,1,2,3$ の積分が施される．このことの含意は，よく定義された生成汎関数を得るためには，余分の自由度に関する積分を省かなければならないということである．

これを行うひとつの方法は，場の積分を，ゲージ条件を与えて制約することである．たとえば1.2.1項で見たように，電荷と電流のない場合の電磁場は，Coulombゲージの下ではスカラー場 $\phi(x)=A^0(x)$ と縦波場[3] $\mathbf{A}_\mathrm{L}(x)$ がゼロになる．しかしLorentzゲージをここで選べば，これらはゼロにはならない．物理的な場 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ に対応するスカラー場と縦波場の値は，ゲージの選び方に依存して変わってしまう．逆にゲージを固定すれば，これらの値は一意的に決まることになる．

よく定義されたQCDの生成汎関数を定義するために，第1に必要となる基本的な手続きは，汎関数積分に対して，場が，設定したゲージ条件を満足するように制約を与えることである．まず，基準となるゲージ条件を設定するための，$A_i^\mu(x)$ によって決まる関数 f_i を次のように定義する．

$$f_i\big(A_i^\mu(x)\big)=\partial_\mu A_i^\mu(x)-h_i(x),\quad i=1,2,\ldots,8 \tag{14.7a}$$

$h_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,8)$ は任意関数である．そして $A_i^\mu(x)$ へのゲージ条件として，次の付帯条件を設定する．

$$f_i\big(A_i^\mu(x)\big)=0,\quad i=1,2,\ldots,8 \tag{14.7b}$$

第2の手続きは，上の制約の結果として，生成汎関数が元の形(14.3)と等価な内容を持ちながら，ラグランジアン密度がゲージ不変な(14.1)から，適切に修正されたラグランジアン密度に置き換わることの確認である．厳密な導出[4]は容易ではないの

[2] 特に1.2節と1.4.1項を参照．

[3] 任意の3元ベクトル場 $\mathbf{A}(x)$ を横波場と縦波場に分解することが可能である．すなわち $\mathbf{A}=\mathbf{A}_\mathrm{T}+\mathbf{A}_\mathrm{L}$ として，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}_\mathrm{T}=0$，$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_\mathrm{L}=\mathbf{0}$ を満たすようにできる．1.4.1項の議論を参照されたい．

[4] 厳密な解説は L. D. Faddeev and A. A. Slavnov, *Gauge Fields: An Introduction to Quantum Theory*, 2nd edn, Addison-Wesley, 1991; もしくは S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume II, Cambridge University Press, 1996 を参照．

で，完全な説明をここで与えることは試みない．我々の目的は，最終的な結果の主要な特徴がもっともらしいことを認識し，その結果を用いて14.3節において，クォークも存在する場合のQCDにおけるFeynman規則を得ることにある．

14.1.2 数学的な類推

よく定義された生成汎関数を得るための第1の手続きは，式(14.3)の汎関数積分に制約を与えて，場が式(14.7b)の形の付帯条件を満たすようにすることである．まずColemanに倣って通常の積分に関する類似の問題を考察すると，いくらか有益な洞察が得られる[5)]．

よく定義された，ゼロでない n 次元積分を考えよう．

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z_{k+1} \ldots \mathrm{d}z_{k+n}\, \mathrm{e}^{-X} \tag{14.8}$$

ここで"作用"X は，$(k+n)$ 個の実変数 $z_1, z_2, \ldots, z_{k+n}$ の部分集合 $z_{k+1}, \ldots, z_{k+n}$ に依存するものとする．そうすると，次の $(k+n)$ 次元積分，

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z_1 \ldots \mathrm{d}z_{k+n}\, \mathrm{e}^{-X} \tag{14.9}$$

が発散することは明らかである．我々の目的は，式(14.8)と等価で，よく定義された $(k+n)$ 次元積分を見出すことである．これを行うために，$z_{k+1}, \ldots, z_{k+n}$ のそれぞれの値を任意に与えたときに，それらの値と $z_1, z_2, \ldots, z_k$ の値を，次のような形で対応させる．

$$f_i(z_1, z_2, \ldots, z_{k+n}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{14.10}$$

f_i は適切に与える k 個の関数である．X は $z_1, z_2, \ldots, z_k$ には依存しないので，関数 f_i の選び方にも依存しない．よって式(14.8)を次の形に書き直すことができる．

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}f_1 \mathrm{d}f_2 \ldots \mathrm{d}f_k \mathrm{d}z_{k+1} \ldots \mathrm{d}z_{k+n}\, \mathrm{e}^{-X} \prod_{i=1}^{k} \delta(f_i)$$

$\delta(f_i)$ は f_i を引数とする δ 関数である．一連の変数 $f_1, f_2, \ldots, f_k$ を $z_1, z_2, \ldots, z_k$ へ変更すると，次式になる．

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2 \ldots \mathrm{d}z_{k+n}\, \mathrm{e}^{-X} \det\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \prod_{i=1}^{k} \delta(f_i) \tag{14.11a}$$

---

5) S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, 1985, Chapter 5, Section 5.2.

ここで現れたJacobi行列式 $\det(\partial f/\partial z)$ を，式(13.53)を用いて書き直すことができる.

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\int\left(\prod_{i=1}^{k}\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}\tilde{\theta}_i\right)\exp\left(-\sum_{i,j=1}^{k}\theta_i\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\tilde{\theta}_j\right) \tag{14.11b}$$

θ_i と $\tilde{\theta}_i$ は2つの独立な集合を成すGrassmann生成子である．式(14.9)の $(k+n)$ 次元積分とは異なり，積分(14.11a)はよく定義されており，式(14.8)と等価である．式(14.11b)を式(14.11a)に代入すると，本項の最終的な結果が得られる.

$$Z=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k+n}\mathrm{d}z_i\right)\int\left(\prod_{i=1}^{k}\mathrm{d}\theta_i\mathrm{d}\tilde{\theta}_i\right)\mathrm{e}^{-\tilde{X}}\prod_{i=1}^{k}\delta(f_i) \tag{14.12a}$$

$$\tilde{X}=X+\sum_{i,j=1}^{k}\theta_i\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\theta_j \tag{14.12b}$$

14.1.3 Faddeev-Popovの方法

前項において，よく定義されていない積分(14.9)を，同じ変数を用いるけれども δ 関数を導入して条件(14.10)を課することにより，よく定義された適正な積分(14.11)に置き換えられることを示した．その結果(14.11a)は，導出の途中で行う変数の変更から生じる行列式を含む．その行列式は，式(14.11b)に示したように，Grassmann変数 θ_i，$\tilde{\theta}_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ に関する積分を導入した形で書くことができる.

場の理論では，ゲージ条件(14.7)を設定するために，δ 関数に相当する δ 汎関数を用いることにより，同様の結果に到達できる．これはFaddeev and Popovによって行われた．彼らは離散的なGrassmann変数ではなく，独立なGrassmann場 $\eta_i(x)$，$\tilde{\eta}_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,8)$ を用いた，

$$\int\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\tilde{\eta}\equiv\prod_{i=1}^{8}\left(\int\mathcal{D}\eta_i\mathcal{D}\tilde{\eta}_i\right) \tag{14.13}$$

という形の積分を導入した．そして彼らは，少なくともS行列要素の計算に関して，式(14.9)と類似のよく定義されていない生成汎関数(14.3a)を，

$$Z[J_{i\mu}]\propto\int\mathcal{D}A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}X}\det\left(\frac{\delta f_i}{\delta\omega_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{8}\delta[f_i]\right) \tag{14.14a}$$

に置き換え，その汎関数行列式を，

$$\det\left(\frac{\delta f_i}{\delta\omega_j}\right)\propto\int\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\tilde{\eta}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4x'\,\eta_i(x)\frac{\delta f_i}{\delta\omega_j}\tilde{\eta}_j(x')\right\} \tag{14.14b}$$

と与えればよいことを示した[6)].

f_iは，式(14.7a)のように設定される．$\delta[f_i]$はδ関数から類推されるδ汎関数であり，任意の汎関数$F[f_i]$に関して，次式が成立するように定義される．

$$\int \mathcal{D}f_i\, F[f_i]\,\delta[f_i] = F[f_i = 0]$$

式(14.14)における汎関数微分にも注意深い定義が必要である．これを行うために，ゲージ条件(14.7b)を満たすゲージ場を$A^{(0)}_{i\mu}(x)$と書き，ここから議論を始める．この$A^{(0)}_{i\mu}(x)$から，任意のゲージ場$A_{i\mu}(x)$を，適切に選んだゲージ関数$\underset{\sim}{\omega}(x)$によるゲージ変換を通じて得ることができる($\underset{\sim}{\omega} = [\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_8(x)]$)．言い換えると，$A_{i\mu}(x)$は$A^{(0)}_{i\mu}$と$\omega_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, 8)$の関数と見なされる．無限小の$\omega_j(x)$の下では，

$$A_{i\mu}(x) = A^{(0)}_{i\mu}(x) - \partial_\mu \omega_i(x) - g_s f_{ijk}\omega_j(x) A^{(0)}_{k\mu}(x) \tag{14.15}$$

となる(p.278，式(11.26b)参照)．式(14.14a)がδ汎関数を含んでいるために，式(14.14)の汎関数微分を評価する必要が生じるのは，ゲージ条件(14.7)が満たされる極限，すなわち$A_{i\mu}(x) = A^{(0)}_{i\mu}(x)$のときだけである．この条件は，式(14.15)により$\underset{\sim}{\omega}(x) = 0$に対応している．したがって，式(14.14)における汎関数微分は，次のように与えられる．

$$\frac{\delta f_i}{\delta \omega_j} \equiv \left.\frac{\delta f_i(A_{i\mu}(x))}{\delta \omega_j(x')}\right|_{\underset{\sim}{\omega}=0} \tag{14.16}$$

式(14.14a,b)はQCDの径路積分形式による量子化の基礎であり，前項で論じた通常の多重積分に関する結果(14.11a,b)を汎関数積分へ変更した類似物にあたる．式(14.14a)において，付帯条件(14.7b)がδ汎関数によって課されており，積分変数の変更から生じていた行列式は，式(14.14b)のGrassmann場に関する積分に置き換わっている．ここで導入している場$\eta_i(x)$，$\tilde{\eta}_i(x)$はスカラーGrassmann場なので，これらの量子はスピン0のフェルミオンになるはずである．しかし物理的な状態において，そのような粒子はスピン-統計定理[7)]により存在し得ない．この問題は次の14.1.4項において論じる．

上に述べた類似性にもかかわらず，完全に正確な類推関係は成立しない．式(14.8)において我々は“作用”Xが変数の部分集合$z_1, z_2, \ldots, z_k$に依存しないことを仮定

[6)] 式(14.14b)は式(13.61)を一般化したものにあたる．たとえばS. Podorski, *Gauge Field Theories*, 2nd edn, Cambridge University Press (2000), Section 5.2を参照.
[7)] 4.3節の最後の部分を参照.

した．ゲージ不変性は，これよりも複雑な対称性であり，対応する作用(14.3b) は源の項を含むためにゲージ不変ですらない．このため式(14.14) の導出は，式(14.8) から式(14.11) の導出と似ているとはいえ，さらに複雑である．後者の導出は容易ではないので[8)]，式(14.14a,b) を仮定として受け入れて，そこから摂動論のために更に便利な生成汎関数の形を推定することにしよう．これを次項で行い，その結果を 14.3節において QCD の Feynman規則を見出す際に用いる予定である．

14.1.4　ゲージ固定とゴースト場

本項では，生成汎関数(14.14) に手を加えて摂動論に適した形にする．これを行うために，汎関数行列式(14.14b) を評価して，式(14.14a) から δ 汎関数を消す必要がある．

汎関数行列式(14.14b) の評価から始める．式(14.15) により次式が得られる．

$$\left.\frac{\delta A_i^\mu(x)}{\delta\omega_j(x')}\right|_{\underset{\sim}{\omega}=0} = -\left[\delta_{ij}\partial^\mu_{x'} + g_s f_{ijk} A_k^\mu(x')\right]\delta^{(4)}(x-x')$$

よって，式(14.7a) と式(14.16) から，

$$\frac{\delta f_i}{\delta\omega_j} = -\partial_{\mu x'}\left[\delta_{ij}\partial^\mu_{x'} + g_s f_{ijk} A_k^\mu(x')\right]\delta^{(4)}(x-x')$$

となる．この式を式(14.14b) に代入し，部分積分を行うと，式(14.14b) を次の形に書くことができる．

$$\det\left(\frac{\delta f_i}{\delta\omega_j}\right) \propto \int\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\tilde{\eta}\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_g\right\}$$

ここで現れる $\mathcal{L}_g$ は“幽霊項(ゴースト)”(ghost term) と呼ばれ，次式で与えられる．

$$\mathcal{L}_g = \partial_\mu\eta_i(x)\left[\partial^\mu\tilde{\eta}_i(x) + g_s f_{ijk}\tilde{\eta}_j(x)A_k^\mu(x)\right] \tag{14.17}$$

したがって，生成汎関数(14.14a) を，次のように書ける．

$$Z[J_{i\mu}] \propto \int\mathcal{D}A\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\tilde{\eta}\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\left(\mathcal{L}_G + \mathcal{L}_g + J_{i\kappa}A_i^\kappa\right)\right\}\prod_i\delta[f_i] \tag{14.18}$$

---

8) 多くの著者が，作用(14.3) がゲージ不変であるという誤った仮定の下で，この導出を行っている．このような間違った扱い方に論及すると同時に，明快な解説を与えている文献として D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theories*, Rev. edn, Institute of Physics Publishing (1993), Section 10.4 がある．

$\mathcal{L}_G$ は式(14.1) によって与えられる.

最後に，式(14.18) から目障りな δ 汎関数を除かなければならない．このために，Z と次の定数の積を考える.

$$C \equiv \int \left(\prod_i \mathcal{D}h_i \right) \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{2} \sum_i \bigl(h_i(x) \bigr)^2 \right\}$$

$Z[J_{i\mu}]$ はゲージ不変であり，これは関数 $h_i(x)$ の選び方に依存してはならない．したがって，Z を C の汎関数積分の中に入れてもよい.

$$Z[J_{i\mu}] \propto C\, Z[J_{i\mu}] \propto \int \left(\prod_i \mathcal{D}h_i \right) Z \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{2} \sum_i \bigl(h_i(x) \bigr)^2 \right\} \tag{14.19}$$

そして，式(14.19) の右辺の積分の中に式(14.18) を代入し，次の関係を利用して δ 汎関数 $\delta[f_i]$ を消す.

$$\begin{aligned} &\int \left(\prod_i \mathcal{D}h_i \right) \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{2} \int \mathrm{d}^4x \sum_i \bigl(h_i(x) \bigr)^2 \right\} \left(\prod_i \delta\bigl[\partial_\mu A_i^\mu(x) - h_i(x) \bigr] \right) \\ &= \exp\left\{ -\frac{\mathrm{i}}{2} \int \mathrm{d}^4x \bigl(\partial_\mu A_i^\mu(x) \bigr)^2 \right\} \end{aligned}$$

右辺 (2 行目) の中の添字 i については，自乗の括弧内にあるので繰り返されているものとして和を含意するものと見る．このようにして最終的な結果を得る.

$$Z[J_{i\mu}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A\, \mathcal{D}\eta\, \mathcal{D}\tilde{\eta} \exp\left\{ \mathrm{i} \int \mathrm{d}^4x \bigl(\mathcal{L} + J_{i\kappa} A_i^\kappa \bigr) \right\} \tag{14.20}$$

ここでラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は，次のように与えられる.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'} + \mathcal{L}_g \tag{14.21}$$

$$\mathcal{L}_{G'} = -\frac{1}{4} G_{i\mu\nu}(x) G_i^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \bigl(\partial_\mu A_i^\mu(x) \bigr)^2 \tag{14.22}$$

ゴースト項 $\mathcal{L}_g$ は式(14.17) で与える．定数 N は規格化条件(14.3c) によって決まる.

式(14.20) は，クォークがない場合のグルーオン場の生成汎関数を表す最終的な結果であるが，最も驚くべき特徴はゴースト項 $\mathcal{L}_g$ の出現である．この項はゲージ場 $A_i^\mu(x)$ と相互作用する“幽霊場(ゴースト)”$\eta_i(x)$，$\tilde{\eta}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ を記述する．ゴースト場はスカラーの Grassmann 場であり，その量子はスピン 0 のフェルミオンである．これはスピン-統計定理を破るので，物理的な状態においてそのような粒子の存在は許されない．それにもかかわらず，ゴースト粒子は伝播関数を通じて，仮想的な中間状態における粒子として寄与を持つことを 14.3 節で見る予定である．ゴースト粒子

が現実の粒子というより数式上の都合のための人工物であるという事情は，ゲージを選ぶことによって理論から完全に消してしまえるという事実によって強調される．たとえば軸性ゲージ (axial gauge) を選ぶならば，ゲージ条件 (14.7) は次のように置き換わる．

$$f_i\big(A_i^\mu(x)\big) = n_\mu A_i^\mu(x) - h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 8 \tag{14.23}$$

ここで n_μ は $(0, 0, 0, 1)$ もしくは任意の固定された空間的（スペースライク）な 4 元ベクトルである．軸性ゲージは 13.2.1 項で言及したように，摂動論に依拠せずに正準形式と径路積分形式の等価性を証明するために用いられるという点で重要なゲージ条件である．また，QCD の非摂動論的な議論においても軸性ゲージはしばしば利用される．しかしこれは問題14.2 で見るように，常に摂動論に適しているものとは言えない．この理由から軸性ゲージでの量子化の問題は，これ以上追及しないことにする．

14.1.5 電磁場の再検討

理論にクォークを導入して Feynman 規則を調べる前に，簡単に Faddeev-Popov の手続きの電磁場への適用について言及しておくことが教育的であろう．議論の方法はグルーオン場に対するものとよく似ているが，f_{ijk} に比例する項は不要で，単一のゲージ場 $A^\mu(x)$ と，それに対応して一対のゴースト場 $\eta(x)$，$\tilde{\eta}(x)$ だけが存在する．このようにして生成汎関数が得られる．

$$Z[J_\mu] = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}\tilde{\eta}\,\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\big(\mathcal{L} + \mathcal{L}_g + J_\kappa A^\kappa\big)\right\} \tag{14.24}$$

ここで $\mathcal{L}$ は，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}\big[\partial_\mu A^\mu(x)\big]^2 \tag{14.25}$$

と与えられ，ゴースト場 $\mathcal{L}_g$ は，

$$\mathcal{L}_g = \partial_\mu \eta(x)\,\partial^\mu \tilde{\eta}(x)$$

となる．この項は $A^\mu(x)$ に依存しないので，積分 (14.24) を分解して，因子，

$$\int \mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}\tilde{\eta}\,\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_g\right\}$$

を規格化定数に吸収することができ，生成汎関数は，

$$Z[J_\mu] = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}A\,\exp\left\{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\big(\mathcal{L} + J_\kappa A^\kappa\big)\right\} \tag{14.26}$$

と与えられる．問題5.1において注意したように，ラグランジアン密度(14.25)は，第5章で導入したラグランジアン密度，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\Big(\partial_\nu A_\mu(x)\Big)\Big(\partial^\nu A^\mu(x)\Big) \tag{14.25a}$$

と等価である．両者は4元発散が異なるだけで，これは作用に寄与を持たないからである．したがって生成汎関数(14.26)は，通常のLorentzゲージでの量子化から得た生成汎関数(13.79)と同じである．最後に，式(14.25)の第2項と，式(14.22)の第2項は"ゲージ固定項"(gauge-fixing term)と呼ばれることを指摘しておく．他のゲージに対応するゲージ固定項を，問題14.1と問題14.2において扱うことにする．

14.2　クォークの導入

前節では，グルーオン場の力学に議論の焦点を置くために，クォークを無視した．本節ではクォーク場を再び導入し，次節の摂動論やその次の14.4節におけるFeynman規則の考察への準備をする．議論を簡単にするために，全体を通じてクォークの香りをひとつだけに限定し，香りの添字 $f = d, u, s, \ldots$ を省くことにする．この扱い方は，QEDを論じた際に，まず荷電レプトンを1種類だけ(電子-陽電子だけ)に限定した議論を行い，他の荷電レプトンの導入については7.4節でごく簡単に済ませたやり方と並行する関係にある．

14.2.1　QCDのラグランジアン

クォークと，そのグルーオンとの相互作用は，ラグランジアン密度(11.28)によって記述される．式(11.28)ではクォークの色の添字 $a, b, c, \ldots = r, g, b$ の表記を省いたが，ここでは色の添字を明記する．

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}_a(x)\left[\mathrm{i}\not{D}_{ab} - m\delta_{ab}\right]\psi_b(x) \tag{14.27}$$

ここで，

$$D^\mu_{ab} = \delta_{ab}\partial^\mu + \mathrm{i}g_s(\lambda_j)_{ab}A^\mu_j(x)/2 \tag{14.28}$$

であり，繰り返されている添字については，通例どおりに和を取るものと見なす[9]．

---

[9] これ以降，全体を通じてアルファベットの最初の $a, b, c, \ldots$ をクォークの色の添字と見なし(3通りの値 r, g, b を取るものとする)，アルファベットの中間の $i, j, k, \ldots$ をグルーオンの色電荷の添字と見なす(値は $1, 2, \ldots, 8$ を取る)．

このラグランジアン密度 $\mathcal{L}_q$ を，Faddeev-Popov のアプローチから得たグルーオンのラグランジアン密度(14.21) に加えると，QCD のラグランジアン密度が得られる．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{G'} + \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g \tag{14.29}$$

純粋なグルーオン項 $\mathcal{L}_{G'}$ は式(14.22) によって与えられ，クォーク場を含む $\mathcal{L}_q$ は式(14.27)，ゴースト場を含む $\mathcal{L}_g$ は式(14.17) によって与えられる．

通例に倣い，ラグランジアン密度を自由場項と相互作用項に分解することができる．自由場項は結合定数を $g_s = 0$ と置いた場合のラグランジアン密度に相当する．これは，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{4} F_{i\mu\nu}(x) F_i^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu A_i^\mu(x)\Big)^2 \\ & + \bar{\psi}_a(x)\Big[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m\Big]\psi_a(x) + \partial_\mu \eta_i(x)\partial^\mu \tilde{\eta}_i(x)\end{aligned}$$

あるいは，より便利な形として，次のように書いてもよい．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{2}\Big(\partial_\nu A_{i\mu}(x)\Big)\Big(\partial^\nu A_i^\mu(x)\Big) \\ & + \bar{\psi}_a(x)\Big[\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m\Big]\psi_a(x) + \partial_\mu \eta_i(x)\partial^\mu \tilde{\eta}_i(x)\end{aligned} \tag{14.30}$$

ここでは QED における議論 (式(14.25) および(14.25a)参照) からの類推により，グルーオン場の項を物理的に等価な別の形に置き換えた．全ラグランジアン密度は，次の形で書かれる．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{I}} \tag{14.31}$$

相互作用項 $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{I}} = & -\frac{1}{2} g_s \bar{\psi}_a(x)\gamma_\mu(\lambda_j)_{ab}\psi_b(x) A_j^\mu(x) \\ & + g_s f_{ijk} A_{i\mu}(x) A_{j\nu}(x)\partial^\mu A_k^\nu(x) \\ & -\frac{1}{4} g_s^2 f_{ijk} f_{ilm} A_j^\mu(x) A_k^\nu(x) A_{l\mu}(x) A_{m\nu}(x) \\ & + g_s f_{ijk}\Big(\partial_\mu \eta_i(x)\Big)\tilde{\eta}_j(x) A_k^\mu(x)\end{aligned} \tag{14.32}$$

第 3 項までは，既に式(11.28b) と (11.37) において見ている．これらは図11.1 (p.277) に示してある 3 通りの相互作用を生じる．新たに加わっている第 4 項は，グルーオン場とゴースト場の相互作用を表しており，ダイヤグラムでは図14.1 のように描かれる．

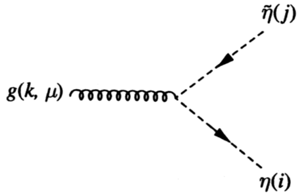


図14.1 式(14.32)の最後の項から生じるゴースト-グルーオン結節点．これ以降，矢印の付いた破線は，ゴースト場 η_i，$\tilde{\eta}_i$ に対応する粒子を表すものとする．

14.2.2 生成汎関数

ラグランジアン密度(14.29)に対応する生成汎関数は，次のように与えられる．

$$Z[J_{i\kappa},\sigma_a,\bar{\sigma}_a,S_i,\tilde{S}_i]=\frac{1}{N}\int\mathcal{D}A\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}\tilde{\eta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}X'} \tag{14.33a}$$

$$X'=\int\mathrm{d}^4x\left(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_\mathrm{I}+\mathcal{L}_\mathrm{S}\right) \tag{14.33b}$$

上式の X' は，QCDの作用，

$$X=\int\mathrm{d}^4x\left(\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_\mathrm{I}\right) \tag{14.34}$$

に，源による次の作用を加えたものである．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mathrm{S}(x)=J_{i\kappa}(x)\,A_i^\kappa(x)+\bar{\sigma}_a(x)\,\psi_a(x)+\bar{\psi}_a(x)\sigma_a(x)\\+S_i(x)\eta_i(x)+\tilde{S}_i(x)\,\tilde{\eta}_i(x)\end{aligned} \tag{14.35}$$

$S_i(x)$, $\tilde{S}_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,8)$ はゴースト場に対応するスカラーGrassmann源，$\sigma_a(x)$, $\bar{\sigma}_a(x)$ $(a=r,g,b)$ はクォーク場に対応するスピノルGrassmann源である．通例に従い，積分は場のすべての成分に関して行う．グルーオン場とゴースト場の積分は，それぞれ式(14.4)と式(14.13)を意味し，クォーク場の積分は，

$$\int\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi=\prod_a\prod_\alpha\left(\mathcal{D}\bar{\psi}_{a,\alpha}\mathcal{D}\psi_{a,\alpha}\right) \tag{14.36}$$

を意味する．a は色の添字，α はスピノル添字である．最後に，定数 N は通常の規格化条件，

$$Z[0,0,0,0,0]=1 \tag{14.33c}$$

によって決まる．すなわち，次式で与えられる．

$$N = \int \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\tilde{\eta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}X} \tag{14.37}$$

Green 関数も，QED の場合の式(13.111) と同様に定義される．

$$\langle A_1(x_1)A_2(x_2)\ldots A_n(x_n)\rangle = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}A\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\eta\mathcal{D}\tilde{\eta}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}X}A_1(x_1)\ldots A_n(x_n)\right\} \tag{14.38}$$

X は作用(14.34) であり，$A_1(x_1)\ldots A_n(x_n)$ は任意のクォーク場やグルーオン場の組合せを表す．具体的な Green 関数の式は，生成汎関数(14.33) に適切に微分を施すことによって得られる．たとえばクォーク場とグルーオン場を含む Green 関数は，次のように与えられる (QED の場合の式(13.62a) を参照)．

$$\begin{aligned}&\langle A_i^\mu(x_1)\ldots\psi_a(y_1)\ldots\bar{\psi}_b(z_1)\ldots\rangle\\ &= (-1)^{\bar{n}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^n \left.\frac{\delta^n Z}{\delta J_{i\mu}(x_1)\ldots\delta\bar{\sigma}_a(y_1)\ldots\delta\sigma_b(z_1)\ldots}\right|_0\end{aligned} \tag{14.39a}$$

n はすべての場の数，$\bar{n}$ は随伴クォーク場 $\bar{\psi}_b$ の数を表す．物理的な状態においてゴースト粒子は現れないので，物理過程の計算に必要となるのは上に示した Green 関数だけのはずであるが，摂動論を構築するにはゴースト場を含む Green 関数も考える方が都合がよい．たとえば，次のような Green 関数も利用する．

$$\begin{aligned}&\langle A_i^\mu(x_1)\ldots\tilde{\eta}_j(y_1)\ldots\eta_k(z_1)\ldots\rangle\\ &= \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^n \left.\frac{\delta^n Z}{\delta J_{i\mu}(x_1)\ldots\delta\tilde{S}_j(y_1)\ldots\delta S_k(z_1)\ldots}\right|_0\end{aligned} \tag{14.39b}$$

座標空間の Green 関数(14.38) に対応する運動量空間の Green 関数は，次式によって決まる (式(12.10) 参照)．

$$\begin{aligned}&(2\pi)^4\delta^{(4)}(q_1+q_2+\cdots+q_n)\langle A_1(q_1)A_2(q_2)\ldots A_n(q_n)\rangle\\ &= \int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\ldots\mathrm{d}^4x_n\left(\prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_ix_i}\right)\langle A_1(x_1)A_2(x_2)\ldots A_n(x_n)\rangle\end{aligned} \tag{14.40}$$

ここでも慣例として，各運動量変数を内向きに定義する．

14.2.3 自由場

相互作用を除いた系を考える場合，$\mathcal{L}_\mathrm{I} = 0$ と置くことになり，生成汎関数は次のように簡約される．

$$Z_0[J_{i\kappa}, \sigma, \bar{\sigma}, S_i, \tilde{S}_i] = \frac{1}{N_0}\int \mathcal{D}A\,\mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}\tilde{\eta}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}X_0'} \tag{14.41a}$$

$$X_0' = \int \mathrm{d}^4x\left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_\mathrm{S}\right) \tag{14.41b}$$

N_0は，次の規格化条件から決まる．

$$Z_0[0,0,0,0,0] = 1 \tag{14.41c}$$

式(14.41)における $\mathcal{L}_0$ と $\mathcal{L}_\mathrm{S}$に，式(14.30), (14.35) を代入すると，次の関係が得られる．

$$Z_0[J_{i\kappa}, \sigma_a, \bar{\sigma}_a, S_i, \tilde{S}_i] = Z_0[J_{i\kappa}]\,Z_0[\sigma_a, \bar{\sigma}_a]\,Z_0[S_i, \tilde{S}_i] \tag{14.42}$$

右辺の $Z_0[J_{i\kappa}]$，$Z_0[\sigma_a, \bar{\sigma}_a]$，$Z_0[S_i, \tilde{S}_i]$ は，それぞれ自由なグルーオン場，クォーク場，ゴースト場の生成汎関数である．具体的には，以下のように定義される．

自由なグルーオン場：

$$Z_0[J_{i\kappa}] = \frac{1}{N_1}\int \mathcal{D}A\,\exp\bigl\{\mathrm{i}X[J_{i\kappa}]\bigr\} \tag{14.43a}$$

$$X[J_{i\kappa}] = \int \mathrm{d}^4x\Bigl\{-\frac{1}{2}\bigl(\partial_\nu A_{i\mu}(x)\bigr)\bigl(\partial^\nu A_i^\mu(x)\bigr) + J_{i\kappa}(x)\,A_i^\kappa(x)\Bigr\} \tag{14.43b}$$

$$N_1\text{を決める規格化条件：}\; Z_0[J_{i\kappa}\!=\!0] = 1 \tag{14.43c}$$

自由なクォーク場：

$$Z_0[\sigma_a, \bar{\sigma}_a] = \frac{1}{N_2}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi\,\exp\bigl\{\mathrm{i}X[\sigma_a, \bar{\sigma}_a]\bigr\} \tag{14.44a}$$

$$X[\sigma_a, \bar{\sigma}_a] = \int \mathrm{d}^4x\bigl\{\bar{\psi}_a(x)\,(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m)\,\psi_a(x) + \bar{\sigma}_a(x)\,\psi_a(x) + \bar{\psi}_a(x)\,\sigma_a(x)\bigr\} \tag{14.44b}$$

$$N_2\text{を決める規格化条件：}\; Z_0[\sigma_a\!=\!0,\ \bar{\sigma}_a\!=\!0] = 1 \tag{14.44c}$$

自由なゴースト場：

$$Z_0[S_i, \tilde{S}_i] = \frac{1}{N_3}\int \mathcal{D}\eta\,\mathcal{D}\tilde{\eta}\,\exp\bigl\{\mathrm{i}X[S_i, \tilde{S}_i]\bigr\} \tag{14.45a}$$

$$X[S_i, \tilde{S}_i] = \int \mathrm{d}^4x\bigl\{\partial_\mu\eta_i(x)\,\partial^\mu\tilde{\eta}_i(x) + S_i(x)\,\eta_i(x) + \tilde{S}_i(x)\,\tilde{\eta}_i(x)\bigr\} \tag{14.45b}$$

$$N_3\text{を決める規格化条件：}\; Z_0[S_i\!=\!0,\ \tilde{S}_i\!=\!0] = 1 \tag{14.45c}$$

各自由場の生成汎関数(14.43), (14.44), (14.45)は，QEDにおける自由な電磁場と自由な電子場の生成汎関数(13.79), (13.80)に似た形をしている．後者については13.2.3項と13.2.4項において詳しく評価してあり，QCDの自由場生成汎関数についても同じ技法を用いた評価が可能である．ここでは結果だけを紹介する．

グルーオン場：(式(13.95)参照)

$$Z_0[J_{i\kappa}] = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\left[J_{i\kappa} D^{\kappa\lambda}_{\mathrm{F}ij} J_{j\lambda}\right]\right\} \tag{14.46}$$

グルーオンの伝播関数は，

$$D^{\kappa\lambda}_{\mathrm{F}ij}(x) = \delta_{ij} D^{\kappa\lambda}_{\mathrm{F}}(x) \tag{14.47a}$$

と与えられる．$D^{\kappa\lambda}_{\mathrm{F}}(x)$は光子伝播関数(5.27)と同じものである．

$$D^{\kappa\lambda}_{\mathrm{F}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\, \mathrm{e}^{-ikx} D^{\kappa\lambda}_{\mathrm{F}}(k), \quad D^{\kappa\lambda}_{\mathrm{F}}(k) = \frac{-g^{\kappa\lambda}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{14.47b}$$

クォーク場：(式(13.105)参照)

$$Z_0[\sigma_a, \bar{\sigma}_a] = \exp\left\{-\mathrm{i}\left[\bar{\sigma}_a S_{\mathrm{F}ab} \sigma_b\right]\right\} \tag{14.48}$$

クォークの伝播関数は，

$$S_{\mathrm{F}ab}(x) = \delta_{ab} S_{\mathrm{F}}(x) \tag{14.49a}$$

と与えられる．$S_{\mathrm{F}}(x)$はフェルミオン伝播関数(4.63)と同じものである．

$$S_{\mathrm{F}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\, \mathrm{e}^{-ipx} S_{\mathrm{F}}(p), \quad S_{\mathrm{F}}(p) = \frac{1}{\not{p} - m + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{14.49b}$$

ゴースト場：

$$Z_0[S_i, \tilde{S}_i] = \exp\left\{-\mathrm{i}\left[S_i \Delta_{\mathrm{F}ij} \tilde{S}_j\right]\right\} \tag{14.50}$$

ゴーストの伝播関数は，

$$\Delta_{\mathrm{F}ij}(x) = \delta_{ij} \Delta_{\mathrm{F}}(x) \tag{14.51a}$$

と与えられる．$\Delta_{\mathrm{F}}(x)$は中間子伝播関数(3.59)において質量をゼロとおいたものと同じである．

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\, \mathrm{e}^{-ikx} \Delta_{\mathrm{F}}(k), \quad \Delta_{\mathrm{F}}(k) = \frac{1}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{14.51b}$$

14.3　摂動論

本節と次節では，13.3節においてQEDに対して導入した摂動論の方法をQCDの場合へと拡張し，それを用いてGreen関数を評価することを通じて，QCDにおけるFeynman規則を導く．この作業の進め方はQEDの場合とよく似ているので，手順の概要だけを示し，詳細は読者に委ねることにする．しかしながら，注目すべき多くの新たな特徴も現れることになる．

14.3.1　Wickの定理と伝播関数

第1段階として，自由場のGreen関数 $\langle ABC\ldots\rangle_0$ を評価する．$ABC\ldots$ はクォーク場，グルーオン場，ゴースト場の任意の組合せを表す．これは自由場の生成汎関数(14.46), (14.48), (14.50)から評価することができ，その扱い方は13.3.1項で示したQEDの場合と極めてよく似ている．ここでも $ABC\ldots$ が奇数個の場から成る場合，自由場Green関数はゼロになる．偶数個の場を含む場合には，やはりWickの定理(13.108)を適用すればよい．このときゼロにならない縮約は，以下のものに限られる．

$$\underbrace{A_i^\mu(x)\,A_j^\nu(y)} = \underbrace{A_j^\nu(y)\,A_i^\mu(x)} = \mathrm{i}D_{\mathrm{F}ij}^{\mu\nu}(x-y) \tag{14.52a}$$

$$\underbrace{\psi_a(x)\,\bar{\psi}_b(y)} = -\underbrace{\bar{\psi}_b(y)\,\psi_a(x)} = \mathrm{i}S_{\mathrm{F}ab}(x-y) \tag{14.52b}$$

$$\underbrace{\tilde{\eta}_i(x)\,\eta_j(y)} = -\underbrace{\eta_j(y)\,\tilde{\eta}_i(x)} = \mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}ij}(x-y) \tag{14.52c}$$

グルーオン，クォーク，ゴーストの伝播関数 ($D_{\mathrm{F}ij}^{\mu\nu}$, $S_{\mathrm{F}ab}$, $\Delta_{\mathrm{F}ij}$) はそれぞれ式(14.47), (14.49), (14.51)によって与えられる．

14.3.2　摂動展開

QCDに関する摂動展開は，13.3.2項で論じたQEDに関する議論を直接的に一般化することで得られる．QEDの摂動は式(13.113)に基礎を置くが，これは生成汎関数(13.63)が含んでいる作用を，式(13.112)のように自由場項と相互作用項に分解することによって得られた式である．QCDの生成汎関数(14.33)を用いて同じ作業を行うと，やはりGreen関数に関して同じ式,

$$\langle ABC\ldots\rangle = \frac{\left\langle \exp\left\{ \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}(ABC\ldots)\right\rangle_0}{\left\langle \exp\left\{ \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\right\}\right\rangle_0} \tag{14.53}$$

が得られるが，ここでは相互作用ラグランジアン $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ が式(14.32) で与えられることになる．式(14.53) の中の指数関数を $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ の冪(べき)に展開して，次節に示すように各展開項に対して Wickの定理を適用すれば，摂動計算を行える．我々は連結Green関数だけに関心があるので，式(14.53) の分母は，QED の場合に式(13.114) のところで述べたことと同様の事情から，無視することができる．

14.3.3 結節点因子

1次の摂動論の考察から始めよう．式(14.53) の展開は，単に次のようになる．

$$\langle ABC\ldots\rangle = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\langle \mathcal{L}_\mathrm{I}(x)\,(ABC\ldots)\rangle_0 \tag{14.54}$$

$\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)$ は，式(14.32) によって与えられるので，複数の項を含んでいる．項に含まれる場と $ABC\ldots$ がゼロにならない縮約だけを構成できるような組合せになっていない場合，その項は寄与を持たない．このことから相互作用ラグランジアン密度(14.32) の各項に関連づけて，適切な $ABC\ldots$ の場の選択によって“結節点因子(ヴァーテックス)”を決めることができる．これを以下に示す．

クォーク-グルーオン結節点

演算子を次のように選択する．

$$ABC\ldots = A_i^\nu(x_1)\,\psi_c(x_2)\,\bar{\psi}_d(x_3)$$

すると，式(14.32) の最初の項だけが式(14.54) へ寄与を持ち，次の結果が得られる．

$$\langle A_i^\nu(x)\,\psi_c(x_2)\,\bar{\psi}_d(x_3)\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{2}\,g_s\int \mathrm{d}^4x\,F \tag{14.55a}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle[\bar{\psi}_a(x)\,\gamma_\mu\,(\lambda_j)_{ab}\psi_b(x)]\,A_j^\mu(x)\,A_i^\nu(x_1)\,\psi_c(x_2)\,\bar{\psi}_d(x_3)\rangle_0 \\ &= \langle A_j^\mu(x)\,A_i^\nu(x_1)\,\psi_c(x_2)\,[\bar{\psi}_a(x)\,\gamma_\mu\,(\lambda_j)_{ab}\psi_b(x)]\,\bar{\psi}_d(x_3)\rangle_0 \end{aligned} \tag{14.55b}$$

この結果は QED における式(13.115) とよく似ており，QED ではここから図13.2 (p.357) に対応する連結Green関数(13.118) を得た．全く同様の計算を行うと，QCD

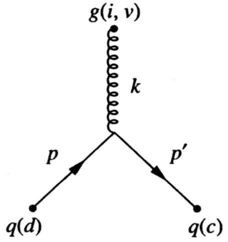


図14.2　1次の Green 関数(14.57). 運動量変数は内向きに設定してあり, $p' = -(p+k)$ である.

の1次までの連結Green関数として, 次式が得られる.

$$\langle A_i^\nu(x_1)\psi_c(x_2)\bar{\psi}_d(x_3)\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{2}g_s\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(x_1-x)\mathrm{i}S_\mathrm{F}(x_2-x)\gamma_\mu(\lambda_i)_{cd}\mathrm{i}S_\mathrm{F}(x-x_3) \tag{14.56}$$

これに対応する運動量空間の Green 関数は次式で定義される.

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(k+p+p')\langle A_i^\nu(k)\psi_c(p')\bar{\psi}_d(p)\rangle = \int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px_3}\langle A_i^\nu(x_1)\psi_c(x_2)\bar{\psi}_d(x_3)\rangle$$

ここでも, すべての運動量変数を内向きに定義している (式(14.40)参照). 式(14.56)をこの式に代入し, 各伝播関数に具体的な式を充てて積分を評価すると, 最終的に次式が得られる.

$$\langle A_i^\nu(k)\psi_c(p')\bar{\psi}_d(p)\rangle = \mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(k)\mathrm{i}S_\mathrm{F}(p+k)\left[-\frac{\mathrm{i}g_s}{2}(\lambda_i)_{cd}\gamma_\mu\right]\mathrm{i}S_\mathrm{F}(p) \tag{14.57}$$

上式では運動量保存条件 $p'+p+k=0$ を課した. これを Feynman グラフで表すと図14.2 になる. グラフの線分の描き方と伝播関数因子の対応関係は図14.3 のようにしてある. $\mathrm{i}S_{\mathrm{F}ab}(p) = \mathrm{i}S_\mathrm{F}(p)\delta_{ab}$ や $\mathrm{i}D_{\mathrm{F}ij}^{\mu\nu}(k) = \mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(k)\delta_{ij}$ のような伝播関数因子を充てるときには, 我々は常套的に $a=b$, $i=j$ と置いて Kronecker のデルタを省く. 式(14.57) における残りの因子が, ここで求めたかったクォーク - グルーオン結節点(ヴァーテックス)の結節点因子にあたる.

$$-\mathrm{i}g_s\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)_{cd}\gamma_\mu = -\mathrm{i}g_s(T_i)_{cd}\gamma_\mu \tag{14.58a}$$

ここで慣用的な記号を導入した.

$$T_i \equiv \frac{\lambda_i}{2}, \quad i=1,2,\ldots,8 \tag{14.58b}$$

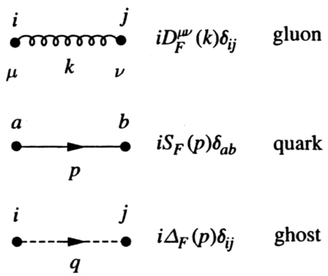


図14.3 式(14.52)の各縮約に対応する伝播関数因子．i, j はゴーストもしくはグルーオンの色電荷の添字，a, b はクォークの色の添字である．

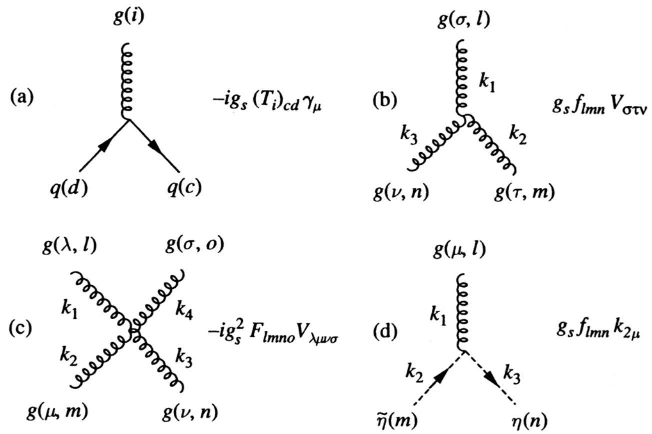


図14.4 QCDの結節点因子．式(14.58), (15.68), (14.70), (14.72)に，(a), (b), (c), (d)がそれぞれ対応する．4元運動量の変数は，通例に従って内向きに定義されている．

クォーク-グルーオン結節点と，これに対応する因子を図14.4(a)に示す．

3グルーオン結節点

この結節点（ヴァーテックス）は，式(14.32)の第2項から生じるものであり，その因子は，場を次のように選択した1次Green関数(14.54)を評価することによって容易に得られる．

$$ABC = A_l^\alpha(x_1)\,A_m^\beta(x_2)\,A_n^\gamma(x_3) \tag{14.59}$$

Wickの定理により，式(14.32)の第2項だけがゼロでない寄与を持ち，Green関数は

次のようになる.

$$\langle A_l^\alpha(x_1)\,A_m^\beta(x_2)\,A_n^\gamma(x_3)\rangle = \mathrm{i}g_s f_{ijk} g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau}\int \mathrm{d}^4x\, F \tag{14.60a}$$

$$F = \langle A_i^\sigma(x)\,A_j^\tau(x)\,\partial_x^\mu A_k^\nu(x)\,A_l^\alpha(x_1)\,A_m^\beta(x_2)\,A_n^\gamma(x_3)\rangle_0 \tag{14.60b}$$

Wickの定理(13.108)を適用する際に，３つの場(14.59)と相互作用項の中の３つの場を組み合わせて縮約をつくる 3! 通りの方法に対応した６種類のゼロでない寄与が生じる．しかし，これらは互いに式(14.59)の変数の組,

$$(l,\alpha,x_1)\qquad(m,\beta,x_2)\qquad(n,\gamma,x_3) \tag{14.61}$$

を入れ換えただけの違いしかないので，ひとつだけを評価して，他の項は対称性を用いて結果を推定すればよい．そこで，最初に次の項を選んでみる.

$$F_1 = \underbrace{A_i^\sigma(x)\,A_l^\alpha(x_1)}\,\underbrace{A_j^\tau(x)\,A_m^\beta(x_2)}\,\partial_x^\mu \underbrace{A_k^\nu(x)\,A_n^\gamma(x_3)} \tag{14.62}$$

これを式(14.60a)に代入し，式(14.52a)の伝播関数因子を用いると，この項に対応する結果は次のようになる.

$$\begin{aligned}&\langle A_l^\alpha(x_1)\,A_m^\beta(x_2)\,A_n^\gamma(x_3)\rangle_1\\&\quad = \mathrm{i}g_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lmn}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\sigma\alpha}(x-x_1)\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\tau\beta}(x-x_2)\,\partial_x^\mu \mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\nu\gamma}(x-x_3)\end{aligned}$$

運動量空間への移行を,

$$\begin{aligned}&(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_2+k_3)\,\langle A_l^\alpha(k_1)\,A_m^\beta(k_2)\,A_n^\gamma(k_3)\rangle_1\\&= \int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1x_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2x_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_3x_3}\,\langle A_l^\alpha(x_1)\,A_m^\beta(x_2)\,A_n^\gamma(x_3)\rangle_1\end{aligned} \tag{14.63}$$

によって行い，積分を評価すると，運動量空間のGreen関数 $\langle A_l^\alpha(k_1)\,A_m^\beta(k_2)\,A_n^\gamma(k_3)\rangle$ に対して，式(14.62)の選択から生じる寄与の最終的な形として,

$$\langle A_l^\alpha(k_1)\,A_m^\beta(k_2)\,A_n^\gamma(k_3)\rangle_1 = g_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lmn} k_3^\mu\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\sigma\alpha}(k_1)\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\tau\beta}(k_2)\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\nu\gamma}(k_3) \tag{14.64}$$

が得られる．ここで $k_1+k_2+k_3=0$ である．他の寄与は，式(14.61)の組の入れ換えによって得られる．これは運動量空間では，等価的に,

$$(l,\alpha,k_1)\qquad(m,\beta,k_2)\qquad(n,\gamma,k_3) \tag{14.65}$$

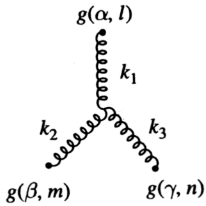


図14.5　1次の Green関数(14.67)．l, m, n は色の指標(添字)を表す．

の置き換えとなる．この後ろの2組を，式(14.64)において置き換えると，第2の寄与，

$$g_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lnm} k_2^{\mu}\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\sigma\alpha}(k_1)\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\tau\gamma}(k_3)\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\nu\beta}(k_2)$$

が得られる．ダミー添字 ν と τ を入れ換え，構造係数 f_{lmn} の反対称性を考慮すると，これを次のように書き直すことができる．

$$-g_s g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} f_{lmn} k_2^{\mu}\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\sigma\alpha}(k_1)\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\tau\beta}(k_2)\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\nu\gamma}(k_3) \tag{14.66}$$

式(14.64)において，他の変数の入れ換えを施して生じる4種類の寄与も，同様の方法で扱って，式(14.64)や式(14.66)と同じ伝播関数因子を含む形に直すことができる．これらすべてを合わせて，最終的に次の形にまとめることができる．

$$\langle A_l^{\alpha}(k_1)\, A_m^{\beta}(k_2)\, A_n^{\gamma}(k_3)\rangle = g_s f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu}\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\sigma\alpha}(k_1)\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\tau\beta}(k_2)\, \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\nu\gamma}(k_3) \tag{14.67}$$

これは図14.5に示すFeynmanグラフに対応する．ここで現れる結節点(ヴァーテックス)因子は，次式で与えられる．

$$g_s f_{lmn} V_{\sigma\tau\nu} = g_s f_{lmn} \left[g_{\nu\tau}(k_3 - k_2)_{\sigma} + g_{\sigma\nu}(k_1 - k_3)_{\tau} + g_{\tau\sigma}(k_2 - k_1)_{\nu} \right] \tag{14.68}$$

3グルーオン結節点(ヴァーテックス)因子は，グラフでは図14.4(b) (p.379)のように示される．

4グルーオン結節点

この結節点(ヴァーテックス)は式(14.32)の第3項から生じ，演算子の組を，

$$ABCD = A_l^{\alpha}(x_1)\, A_m^{\beta}(x_2)\, A_n^{\gamma}(x_3)\, A_o^{\delta}(x_4)$$

のように選んで1次Green関数(14.54)を評価することによって得られる．導出方法は3グルーオン結節点(ヴァーテックス)の場合とよく似ている．運動量空間におけるGreen関数は，次の形で与えられる．

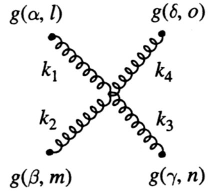


図14.6　1次のGreen関数(14.69)．l, m, n, o は色の指標(添字)を表す．

$$\langle A_l^\alpha(k_1)\,A_m^\beta(k_2)\,A_n^\gamma(k_3)\,A_o^\delta(k_4)\rangle$$
$$= -\mathrm{i}g_s^2 F_{lmno}V_{\lambda\mu\nu\sigma}\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\lambda\alpha}(k_1)\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\mu\beta}(k_2)\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\nu\gamma}(k_3)\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\sigma\delta}(k_4) \qquad (14.69)$$

これは，図14.6のFeynmanグラフに対応する．ここで，

$$\begin{aligned} F_{lmno}V_{\lambda\mu\nu\sigma} = {} & f_{ilm}f_{ino}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\sigma} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma}) \\ & + f_{inm}f_{ilo}(g_{\nu\lambda}g_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}) \\ & + f_{iln}f_{imo}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\mu}g_{\lambda\sigma}) \end{aligned} \qquad (14.70a)$$

であり，4グルーオン結節点(ヴァーテックス)因子は，

$$-\mathrm{i}g_s^2 F_{lmno}V_{\lambda\mu\nu\sigma} \qquad (14.70b)$$

と与えられる．この因子はグラフでは図14.4(c) (p.379)のように表示される．

ゴースト-グルーオン結節点

QCDにおける最後の結節点(ヴァーテックス)因子は，ラグランジアン密度(14.32)の最後の項から生じる．これは演算子の組を，

$$ABC = A_l^\alpha(x_1)\,\tilde{\eta}_m(x_2)\,\eta_n(x_3)$$

と選んで1次Green関数(14.54)を評価することによって得られる．導出方法はクォーク-グルーオン結節点(ヴァーテックス)の場合と似ており，運動量空間のGreen関数は，次の形で与えられる．

$$\langle A_l^\alpha(k_1)\,\tilde{\eta}_m(k_2)\,\eta_n(k_3)\rangle = g_s f_{lmn}k_{2\mu}\,\mathrm{i}D_\mathrm{F}^{\mu\alpha}(k_1)\,\mathrm{i}\Delta_\mathrm{F}(k_2)\,\mathrm{i}\Delta_\mathrm{F}(k_3) \qquad (14.71)$$

これは，図14.7のFeynmanグラフに対応する．結節点(ヴァーテックス)因子は，

$$g_s f_{lmn}k_{2\mu} \qquad (14.72)$$

と与えられ，グラフでは図14.4(d) (p.379)のように示される．

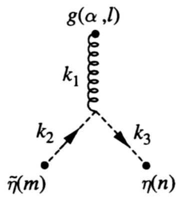


図14.7 1次の Green 関数(14.71).

14.4 QCD の Feynman 規則

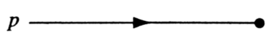
Green 関数を高次の摂動まで計算する際には，式の展開において，図14.3 (p.379) の伝播関数と図14.4 (p.379) の結節点(ヴァーテックス)を用いて描かれトポロジー的に区別されるすべての Feynman グラフに対応する項が見出されることになる．さらに，そのような寄与を計算するときに各項が含む個々の因子を，Feynman グラフを構成する各要素に対応させることができる．したがって QED の場合と同様に，Green 関数や Feynman 振幅を直接に書き下すことを可能にするような Feynman 規則が成立する．

QCD における結節点(ヴァーテックス)因子と伝播関数は既に前節において導いた．残りの規則は，この後に示すように，7.3節で QED に対して得たものとほとんど共通している．

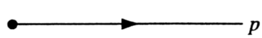
QCD の Feynman 規則は，以下のように与えられる．

1. 各結節点(ヴァーテックス)に，図14.4 (p.379) に従って，対応する結節点(ヴァーテックス)因子を書く．
2. 各伝播関数線に対して，図14.3 (p.379) に従って，対応する伝播関数因子を書く．
3. 外線に関する Feynman 規則は，QED における規則(式(7.49a-f)) とよく似ている．それぞれの外線に対して，以下のように因子を書く．

   (a) 始状態のクォーク：

   $u_{ar}(\mathbf{p})$ 

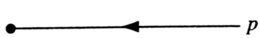
   (b) 終状態のクォーク：

   $\bar{u}_{ar}(\mathbf{p})$ 

   (c) 始状態の反クォーク：

   $\bar{v}_{ar}(\mathbf{p})$ 

   (d) 終状態の反クォーク：

   $v_{ar}(\mathbf{p})$ 

(e) 始状態のグルーオン：

$\varepsilon_{ir\alpha}(\mathbf{k})$



(f) 終状態のグルーオン：

$\varepsilon^{*}_{ir\alpha}(\mathbf{k})$



ここで $\mathbf{p}$ と $\mathbf{k}$ は外線粒子の3次元運動量を表し，$r\ (=1,2)$ は，クォークではスピン状態，グルーオンでは偏極状態を表す．横波のグルーオンだけが許容されるが，これは相互作用がない場合に，自由なグルーオン場が自由な電磁場と全く同じ方程式に従うからである．$a\ (=r,g,b)$ はクォークの色状態を表し，$i\ (=1,2,\ldots,8)$ はグルーオンの色電荷を表す(14.2.1項, 式(14.28)のところの脚註を参照)．α は Lorentz 添字である．

4. 各クォーク線と，それらを接続する各結節点(ヴァーテックス)に対応するスピノル因子は，クォーク線の矢の向きをたどる順序と同じ順序で右から左へ並べる．

5. クォークの閉じたループ各々に対して対角和(トレース)を取り，因子 (-1) を掛ける．

6. 各結節点(ヴァーテックス)において，そこに接続する線の4元運動量は，エネルギー-運動量保存則を満たすものとする．エネルギー-運動量保存から固定されないそれぞれの4元運動量 q について，積分 $(2\pi)^{-4}\int \mathrm{d}^4 q$ を施す．閉じたループ各々に対応して，そのような内部運動量変数 q に関する積分が生じる．

7. 位相因子 δ_{P} を掛ける．この位相因子は，一連の外線 Grassmann 場の順序を外線指標(引数)の順序が適正になるように並べ直すために，Grassmann 場同士を入れ換えなければならない回数が偶数回ならば $+1$，奇数回ならば -1 である．(7.3節の QED に対する Feynman 規則8に対応する．)

ここまでの Feynman 規則1～7は，QED に対する Feynman 規則1～8 (7.3節) と類似関係にある．しかし QCD は新しい特徴も備えており，次の2つの Feynman 規則がつけ加わる．説明はその後すぐに与える．

8. 閉じたゴーストのループ各々に対して，因子 (-1) を掛ける．

9. 閉じたグルーオンのループ各々に対して，適切な“対称性因子” S を掛ける．

規則8は，たとえば図14.8に示すようなゴーストのループに対して因子 (-1) を付与するものである．これはゴーストがクォークや電子と同様に，反交換する場として記述されることから生じる因子であり，光子の自己エネルギー部分 (p.126, 図7.9) において生じる因子 (-1) と全く同じ起源を持つ (式(7.22)のところの議論を参照)．

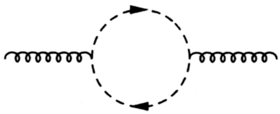


図14.8 閉じたゴーストのループの例. 因子 (-1) が充てられる (規則8参照).

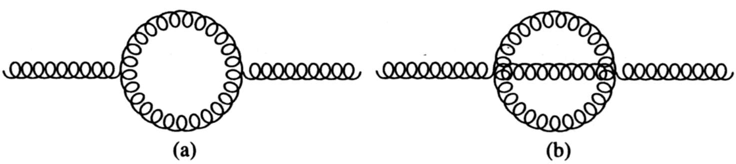


図14.9 閉じたグルーオンのループを含むグラフの例. 対称性因子は (a) では $S = 1/2$, (b) では $S = 1/6$ である (規則9参照).

図14.9は閉じたグルーオンのループを含むグラフの2つの例を示しており, これらのグラフには対称性因子 S が必要となる. 対称性因子は, 相互作用ラグランジアン密度(14.32)の第2項と第3項がグルーオン場を1次ではなく高次で含んでおり, Green関数において余分の結合因子を生じることに起因している.

式(14.32)の第2項を考えてみよう.

$$\mathcal{L}_3(x) \equiv g_s f_{ijk} A_{i\mu}(x) A_{j\nu}(x) \partial^\mu A_k^\nu(x) \tag{14.73}$$

この項から生じる結節点(ヴァーテックス)因子(14.68)は, 図14.5 (p.381)に対応する1次の Green関数(14.60)から得られた. これは次の真空期待値を含む.

$$\langle \mathcal{L}_3(x) A_l^\alpha(x_1) A_m^\beta(x_2) A_n^\gamma(x_3) \rangle_0 \tag{14.74}$$

$\mathcal{L}_3(x)$ に含まれる3つの場と x_1, x_2, x_3 における場とで縮約を形成する方法は明らかに3!通りの組合せがあり, 3!通りのすべての組合せは対称な結節点(ヴァーテックス)因子(14.68)において考慮されている. さらに一般に, ループを含まない高次のダイヤグラム(樹形(ツリー)ダイヤグラム)は n 個の3グルーオン結節点(ヴァーテックス)を含んでおり, 対応する組合せ因子は $(3!)^n$ であり, これは対応する n 個の結節点(ヴァーテックス)因子において考慮される.

ひとつのグルーオンのループにおいて, 同じ結節点(ヴァーテックス)が2つ以上あるようなグラフでは余分の因子が発生する. 例として, 図14.9(a)に示したグルーオンの自己エネルギーグラフを考えよう. 上述の議論に従えば, 各結節点(ヴァーテックス)に因子 (3!) が充てられ, 全

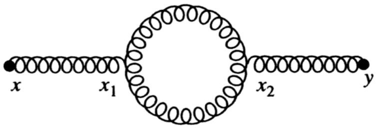


図14.10　図14.9(a) のループにおいて生じているグルーオン自己エネルギーへの２次の寄与.

体としては因子 $(3!)^2$ が生じるはずである．しかし実際の正しい組合せ因子は $(3!)^2/2$ である.

グルーオンの自己エネルギーループにおいて，どのように因子 $(3!)^2/2$ が生じるかを理解するために，グルーオンのグリーン関数 $\langle A_l^\alpha(x)\,A_m^\beta(y)\rangle$ を見てみよう．２次において，これは次の項を含む.

$$\langle \mathcal{L}_3(x_1)\,\mathcal{L}_3(x_2)\,A_l^\alpha(x)\,A_m^\beta(y)\rangle_0$$

これは図14.10に示すようなグルーオンの自己エネルギーループそのものに対応する．この場合，$\mathcal{L}_3(x_1)$ が含む３つの場の任意のひとつを $A_l^\alpha(x)$ との縮約のために選び，$\mathcal{L}_3(x_2)$ が含む３つの場の任意のひとつを $A_m^\beta(y)$ との縮約のために選ぶと，$\mathcal{L}_3(x_1)$ と $\mathcal{L}_3(x_2)$ にそれぞれ２つずつ場が残り，これらの縮約の取り方は２通りしかない．よって全体としての組合せは $3\cdot 3\cdot 2=(3!)^2/2$ となり，結節点（ヴァーテックス）因子から許容される $(3!)^2$ にはならない．この違いの因子 1/2 が，規則9と図14.9(a) において言及してある対称性因子 $S=1/2$ である．同様の議論をひとつのループが３グルーオン結節点（ヴァーテックス）や４グルーオン結節点（ヴァーテックス）をいろいろ含むような場合に拡張することも容易である．たとえば図14.9(b) のグルーオンループの対称性因子は 1/6 になる.

14.5　QCD の繰り込み可能性

本節では QCD の繰り込み可能性を論じる．その方法としては 9.9節で極小（ミニマル）QED を扱った方法や，より一般には 11.3.2項で論じた方法を用いる．既に見たように，基本発散を生じるグラフの種類が限られているならば，繰り込み可能性が保証される．そして基本発散グラフの見かけの発散次数 K は，そのグラフの Feynman 振幅の分子と分母に含まれる運動量因子の冪（べき）を勘定して決めることができる.

ある基本発散グラフ G が f_{i} (f_{e}) 本のクォーク内線 (外線) と，b_{i} (b_{e}) 本のグルー

オン内線(外線)と，η_i (η_e) 本のゴースト内線(外線)を持つものとしよう[10]．そしてGはクォーク-グルーオン結節点（ヴァーテックス）n_a個，3グルーオン結節点n_b個，4グルーオン結節点n_c個，ゴースト-グルーオン結節点n_d個を含むものとする．これらのQCDにおける基本結節点は，図14.4(a)-(d) (p.379) に示すものであり，それぞれ結節点因子の式(14.58), (14.68), (14.70), (14.72) に対応する．

グラフGを表すFeynman振幅の分子と分母の運動量因子を数えれば，このグラフの発散次数Kが分かる．エネルギー-運動量保存によって固定されない内部運動量の数をdとすると，Kは次式で与えられる．

$$K = 4d - f_\mathrm{i} - 2b_\mathrm{i} - 2\eta_\mathrm{i} + n_\mathrm{b} + (n_\mathrm{d} - \eta_\mathrm{e}/2) \tag{14.75}$$

右辺の第2項，第3項，第4項は，基本的なクォーク，グルーオン，ゴーストの伝播関数の運動量依存性から決まっている(p.379, 図14.3および式(14.52))．その後の2つの項は，3グルーオン結節点（ヴァーテックス）とゴースト-グルーオン結節点の運動量依存性から生じている．3グルーオン結節点因子(14.68)はグルーオン運動量の1次の量なので，3グルーオン結節点それぞれから振幅へ運動量因子ひとつずつの寄与があり，このためKの式(14.75)においてn_bという項が現れている．

ゴースト-グルーオン結節点は，注意深い取扱いが必要である．図14.4(d) (p.379)と式(14.72)により，それぞれのゴースト-グルーオン結節点は“入射する”ゴースト線を1本ずつ持ち，それはFeynman振幅に対してひとつの運動量因子の寄与を持つ．しかしn_d個あるゴースト-グルーオン結節点の中で，$\eta_\mathrm{e}/2$個はそこから“出射する”ゴースト線が外線となっているので，その結節点は運動量因子の寄与を生じない．したがってゴースト-グルーオン結節点からの運動量因子への寄与は$(n_\mathrm{d} - \eta_\mathrm{e}/2)$個分だけになる．これが式(14.75)の最後の項である．

グラフGが含む結節点（ヴァーテックス）の総数nは，次式で表される．

$$n = n_\mathrm{a} + n_\mathrm{b} + n_\mathrm{c} + n_\mathrm{d} \tag{14.76}$$

これらの各々の結節点に対応してδ関数が生じる．n個のδ関数のうちのひとつは全体のエネルギー-運動量保存を保証しており，外線運動量だけを含む．したがって$(f_\mathrm{i} + b_\mathrm{i} + \eta_\mathrm{i})$個の内線運動量の中で，独立な変数の個数は，

$$d = f_\mathrm{i} + b_\mathrm{i} + \eta_\mathrm{i} - (n-1) \tag{14.77}$$

だけである．また，以下の関係も容易に導くことができる．

---

[10] 我々がここで考えるGは，大きなグラフの中のサブグラフである．物理過程を表すようなグラフであれば，ゴーストの外線は存在せず$\eta_\mathrm{e} = 0$となる．

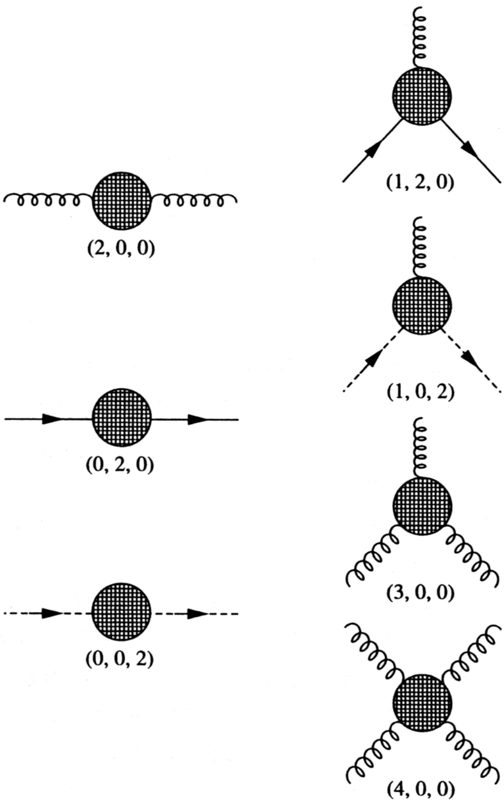


図14.11 7種類の基本発散グラフ．外線数 $(b_\mathrm{e}, f_\mathrm{e}, \eta_\mathrm{e})$ によって特定される．

$$2f_\mathrm{i} + f_\mathrm{e} = 2n_\mathrm{a} \tag{14.78a}$$

$$2b_\mathrm{i} + b_\mathrm{e} = n_\mathrm{a} + 3n_\mathrm{b} + 4n_\mathrm{c} + n_\mathrm{d} \tag{14.78b}$$

$$2\eta_\mathrm{i} + \eta_\mathrm{e} = 2n_\mathrm{d} \tag{14.78c}$$

たとえば式(14.78a)は，クォーク - グルーオン結節点が n_a 個あるならば，それぞれが２本のクォーク線と接続しており，クォーク内線はそれぞれ２個の結節点を結ぶという関係から与えられている．式(14.78)の他の２本の式も，同様の方法から導かれる．式(14.76)から式(14.78)までを用いて，発散次数 K の式(14.75)から $d, n, f_\mathrm{i}, b_\mathrm{i}, \eta_\mathrm{i}$ を消去すると，最終的な結果が得られる．

$$K = 4 - b_\mathrm{e} - \frac{3}{2}(f_\mathrm{e} + \eta_\mathrm{e}) \tag{14.79}$$

$K \geq 0$ は，グラフ G が基本発散グラフであるための“必要条件”であり，$K = 0, 1, \ldots$ はグラフが最大で，対数発散，1次発散，... となることを意味する．

式(14.79) はグラフの発散次数 K がクォーク外線，グルーオン外線，ゴースト外線だけから決まり，グラフに含まれる結節点の数 n_a，n_b，n_c，n_d には依存しないという性質を示している．式(14.79) から基本発散をするグラフの種類は限られているという重要な結果が導かれる．そのようなグラフは外線数によって $(b_\mathrm{e}, f_\mathrm{e}, \eta_\mathrm{e}) = (2,0,0), (0,2,0), (0,0,2), (1,2,0), (1,0,2), (3,0,0), (4,0,0)$ と特定され，図14.11 に示すような7つのダイヤグラムによって表される．左側の3つのグラフは，図14.3 (p.379) に示すような基本的なグルーオン，クォーク，ゴーストの伝播関数か，もしくはそれらに対して自己エネルギー補正を施したものにあたる．右側の4つのグラフは，図14.4 (p.379) に示してある QCD の基本結節点か，もしくはそれらに対する高次補正にあたる．このように QCD における基本発散グラフの種類が有限個なので，QCD は繰り込み可能な理論である．

練習問題

14.1 Lorentz ゲージにおいて，自由な電磁場のラグランジアン密度(14.25) を，より一般的な形に置き換えることができる．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\alpha}\Big(\partial_\mu A^\mu(x)\Big)^2$$

α は任意の実数パラメーターである．13.2.3項の経路積分法を用いて，運動量空間における光子伝播関数が，次式で与えられることを示せ．

$$D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu} + \delta k^\mu k^\nu/k^2}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

ここで $\delta = 1 - \alpha^{-1}$ である．(本書で用いた $\alpha = 1$ という選択は Fermi-Feynman ゲージと呼ばれる．また $\alpha \to 0$ は Landau ゲージもしくは横波ゲージと呼ばれる．)

14.2 電磁場を，次のように定義される軸性ゲージの下で考える．

$$n_\mu A^\mu(x) = 0$$

n_μ は固定された空間的(スペースライク) な4元ベクトルである．Lorentz ゲージにおけるラグランジアン密度(14.25) と類似の適切なラグランジアン密度は，次式で与えられる．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}\Big(n_\mu A^\mu(x)\Big)^2$$

このゲージで運動量空間の伝播関数が，次式になることを示せ．

$$D_\mathrm{F}^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu(n^2 + k^2)/(kn)^2 + (n^\mu k^\nu + n^\nu k^\mu)/(kn)}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

14.3　ゴースト場の生成汎関数(14.45)を評価して，式(14.50)を導け．

14.4　図14.8 (p.385)の自己エネルギー部分の2点Green関数 $\langle A_l^\mu(x_1)\,A_n^\nu(x_2)\rangle$ への寄与を考察し，ゴーストのループにおいて因子 (-1) が生じることを示せ．

14.5　図14.9(b) (p.385)に示してあるグルーオンのループについて，対称性因子 $S = 1/6$ を導け．

第 15 章　漸近的自由性

強い相互作用は 1 f $(= 10^{-15}\,\mathrm{m})$ 程度の距離尺度において，その名の通りに強い．しかし強い相互作用の最も驚くべき特徴は，それよりもさらに短距離になると，弱くなっていくことである．この性質は“漸近的自由性”(asymptotic freedom) として知られる．この性質を最初に明白な形で示唆することになったのは，高エネルギーにおける強粒子(ハドロン)の電磁相互作用を記述するためのクォーク-部分子(パートン)模型の成功であった．この模型は QCD に先だって提唱されたが，次の２つの仮定に立脚していた．すなわち第１に，クォークの電磁相互作用は QED によって与えられるが，電子電荷 e の代わりにクォーク電荷 e_f $(f = d, u, s, \ldots)$ が関わるものと仮定する．第２に 1 f よりも充分に短い距離尺度において，クォーク間の強い相互作用を無視できるものと仮定する．後者の仮定は大いなる謎であった．強い相互作用も QED と同様に短距離において強くなるものと予想されていたからである．しかしながら 1972 年に 't Hooft(ト・フーフト) は非 Abel ゲージ理論における漸近的自由性の概念を提案した．この性質は 1973 年に Gross(グロス) and Wilczek(ウィルチェック) や，また彼らとは独立に Politzer(ポリッツァア) によって，いわゆる“繰り込み群”の方法を用いて理論的に確認された．この発見が直接の契機となって，強い相互作用の理論としての QCD が進展を見せることになった．

漸近的自由性の最も直接的な証拠は，多くの高エネルギー過程における強粒子噴射(ハドロン ジェット)の観測から得られている．したがって本章では初めに，高エネルギーにおいて電子-陽電子消滅から強粒子(ハドロン)が生成する直接的な過程について，簡単な説明を与える．15.2 節と 15.3 節では，繰り込み群の理論を導入して，まず馴染み深い QED の文脈において，短距離の極限，あるいは等価的に高エネルギー極限の挙動を調べる方法を示す．15.4 節では議論を QCD へと拡張し，QCD の漸近的自由性を示す．章末の 15.5 節において再び QCD の応用について言及する．

15.1　電子-陽電子消滅による強粒子の生成

本節では，次のようなタイプの反応を考察する．

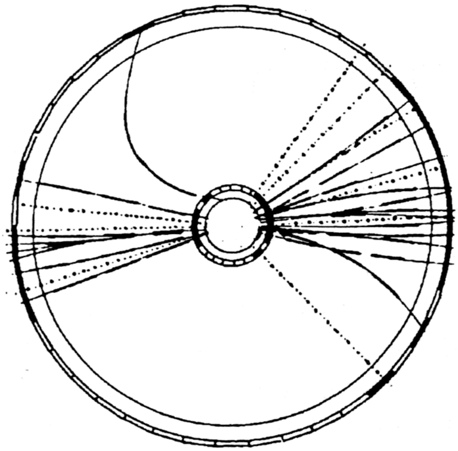


図15.1　DESYにおけるJADE実験で観測された典型的な2-噴射事象(2-ジェット事象)を，コンピューターで再構築した図．内部の円の中心において電子と陽電子が対消滅を起こしている．実線は荷電粒子の軌跡を表し，破線は外部磁場の影響を受けない中性粒子の軌跡を表す．(S. Orito, Proceedings of the 1979 International Conference on Lepton and Photon Interaction at High Energies, FNAL (1979) より転載．)

$$e^+ + e^- \ \rightarrow \ \text{強粒子(ハドロン)群} \qquad (15.1)$$

電子-陽電子衝突の実験によって，このような反応について広範な研究が行われた．この種の実験は色やグルーオンの存在に対する明確な証明を与えたという意味においても歴史的に重要なものであったが，さらには図15.1に示すような強粒子(ハドロン)の噴射(ジェット)現象への知見にも結びついた．強粒子(ハドロン)噴射(ジェット)は高エネルギーの様々な過程において生成されるもので，背景にあるクォークとグルーオンの相互作用に密接に関係した現象である．噴射(ジェット)の生じるすべての過程において，強い相互作用が短距離では弱いという性質が決定的に重要な役割を果たしている．

15.1.1　2-ジェット事象

電子-陽電子消滅によって強粒子(ハドロン)を生成する反応(15.1)は，重心系エネルギーが15-40 GeVの範囲では，図15.2に示すような過程が支配的である[1]．これは2段階

[1] これよりも低いエネルギーでは $q\bar{q}$ 束縛状態(中間子)が役割を持つことになり，より高いエネルギーでは19.4節で論じる予定の弱い相互作用による過程も考慮する必要が出てくる．

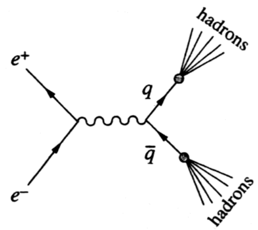


図15.2　電子-陽電子消滅によって2-ジェット生成を起こす基本的な機構.

の過程と見なされる．最初の過程は,

$$e^+ + e^- \;\rightarrow\; q + \bar{q} \tag{15.2}$$

である．重心系においてクォークと反クォークは，運動量保存の要請により，正反対の向きに生成される．それに続いて強い相互作用による“破砕（はさい）”(fragmentation) と呼ばれる過程が起こり，高エネルギーの q と $\bar{q}$ それぞれが，強粒子（ハドロン）群から構成される噴射（ジェット）へと変換される．破砕の過程において，最初のクォークが持つ色状態は，強い相互作用によって噴射（ジェット）を形成しながら変わり，最初の反クォークが持つ色状態も，もう一方の噴射（ジェット）を形成しながら変わる．このことはいろいろな理由から必然的である．たとえばクォークはゼロでない色の量子数を持つけれども，個々の強粒子（ハドロン）や，強粒子（ハドロン）によって構成される噴射（ジェット）は無色だという事実がある．

クォークや反クォークが強粒子（ハドロン）群に変わる破砕過程は大変複雑なものであり，生成する噴射（ジェット）の構成――各噴射（ジェット）が含む粒子の種類や数や，それら個別の運動量など――は事象ごとに異なっている．しかしながら構成粒子の全運動量によって定義される噴射（ジェット）の向き,

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i \tag{15.3}$$

(和は噴射（ジェット）に含まれる全粒子 i について行う) は，その母体となったクォークもしくは反クォークの向きを，ほぼそのまま反映している．このようなことは，最初の電磁的反応 (15.2) によって生成されたクォークと反クォークが，互いに $r \approx 1\,\mathrm{f}$ ほど離れるまで，$\hbar/r$ 程度の運動量移行を起こすような強い相互作用が働かない場合にのみ可能である．そうすると運動量の移行は，最初の反応 (15.2) によってクォークと反クォークが生成したときに与えられている運動量に比べて極めて小さいので，その後に形成

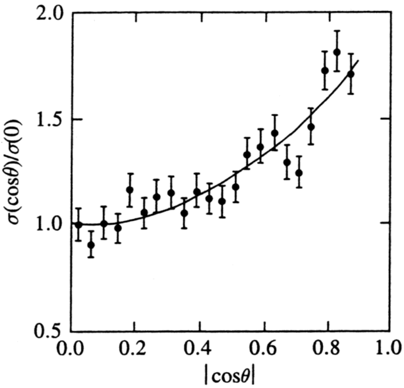


図15.3 DESYにおけるCELLO実験として行われた電子-陽電子衝突実験における2-ジェット事象の角度依存性の実験結果と，理論式(15.5)によって予測される挙動$(1+\cos^2\theta)$との比較．(H. J. Behrend et al., Physics Letters **183B** (1987) 400より転載．)

される噴射(ジェット)の全運動量(15.3)は，ほぼ正確にクォークと反クォークの生成時の運動量の向きと一致する．言い換えると，多くの噴射(ジェット)生成事象を観測するならば，電子-陽電子入射ビームの向きに対する噴射(ジェット)生成の角度分布は，反応(15.2)について計算したクォークと反クォークの生成角度の分布に一致するはずである．

上述の事情を確認するために，基礎反応(15.2)の断面積を計算しておく必要がある．次の反応との類似性を利用すれば，この計算は容易に行える．

$$e^+ + e^- \ \rightarrow\ \mu^+ + \mu^- \tag{15.4}$$

この過程は図7.17 (p.144)に示した機構によるものであるが，反応(15.2)が起こる機構も基本的にこれと同じである．反応(15.4)の断面積は8.4節で計算してあり，充分に高エネルギーにおいてミュー粒子質量を無視する近似の結果を式(8.46)に与えてある．これに対応する，香りが$f = d, u, s, \ldots$を持つクォーク反クォーク対(つい)生成の断面積は，ミュー粒子電荷eをクォーク電荷e_fに置き換えることによって得られる．この電荷量は3つの色状態指標r, g, bにはよらず同じなので，3通りの色状態$r\bar{r}$，$g\bar{g}$，$b\bar{b}$を考慮するために，結果を3倍する必要がある．このようにして重心系における断面積が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = 3e_f^2\left[\frac{\pi\alpha^2}{8E^2}\,(1+\cos^2\theta)\right] \tag{15.5}$$

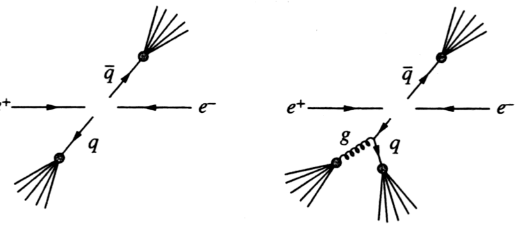


図15.4 電子-陽電子消滅による (a) 2-ジェット事象，(b) 3-ジェット事象を，重心系において模式的に表した図.

θ は電子の向きとクォークの向きのなす角度である．括弧 $[\cdots]$ は $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ の断面積(8.46) にあたる．噴射(ジェット)の向きがクォークと反クォークの生成時の向きを反映しているのであれば，噴射(ジェット)の角度分布は $(1+\cos^2\theta)$ に比例していなければならない．図15.3 に示すように，実験結果は実際にそのようになっている.

15.1.2 3-ジェット事象

e^+e^- 消滅によって強粒子(ハドロン)を生成する支配的な過程は，図15.4(a) に示すように重心系において " 互いに正反対を向いた " 噴射(ジェット)が形成される過程である．しかしながら時には，破砕が始まる前に，クォークもしくは反クォークから広い角度範囲に向けて大きな運動量を持つグルーオンが放射されるという過程が起こることも予想される．これは図15.4(b) に示すように，3-噴射(ジェット)事象を引き起こすことになる．3-噴射(ジェット)事象も，図15.5 に示すように実験的に観測されている.

3-噴射(ジェット)事象を解析するための第 1 段階としては，次のような最初の反応,

$$e^+ + e^- \;\to\; q + \bar{q} + g \tag{15.6}$$

の微分断面積を計算する必要がある．この反応を表す最低次の Feynman グラフは，7.3節と 14.4節に与えた QED および QCD の Feynman 規則に従って，図15.6 のように表される.

その後に生成する噴射(ジェット)の角度分布は，最初の反応(15.6) で生成した粒子が互いに 1 f 程度離れるまで強く相互作用をせず，その後に形成される噴射(ジェット)の向きが最初のクォーク，反クォーク，グルーオンの向きとほとんど一致しているという仮定の下で推定される．しかしながら図15.5 のような事象において，どの噴射(ジェット)がグルーオンから生じたも

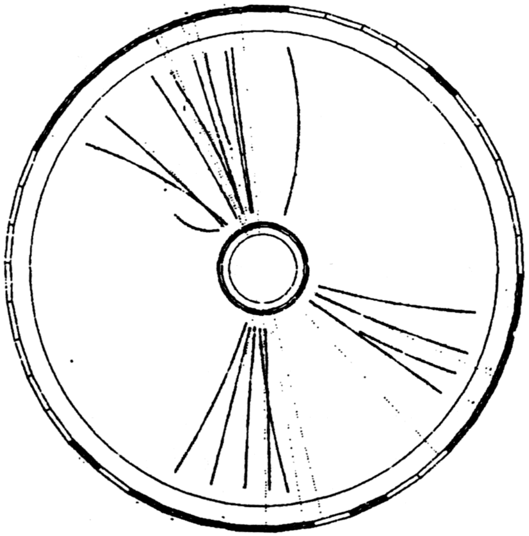


図15.5　DESYにおけるJADE実験で観測された3-ジェット事象をコンピューターにより再構築した図．(S.-L. Wu, Physics Reports **107** (1984) 150より転載．)

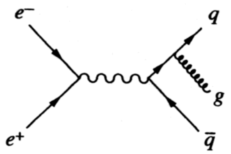


図15.6　反応(15.6)に寄与する最低次の2つのFeynmanグラフのうちのひとつ．もうひとつのグラフでは，クォークではなく反クォークからグルーオンの放射が起こる．

のか明らかではない．3本の噴射（ジェット）は，まず全体の重心系において $E_1 > E_2 > E_3$ のように順序をつけて，それから第2と第3の噴射（ジェット）だけを考慮した重心系へのLorentz変換を考える．この座標系では噴射（ジェット）2と噴射（ジェット）3が互いに正反対を向き，噴射（ジェット）1の角度分布が，噴射（ジェット）2と噴射（ジェット）3が形成する飛跡の線に対する角度 ϕ の形でプロットされる．後者は通常，グルーオンの飛跡に対応する．何故なら重心系において最もエネルギーの高い噴射（ジェット）1は，最初に生成したクォークもしくは反クォークのうち，グルーオンを生成していない方から生じていると推測されるからである．詳しい計算によると，分

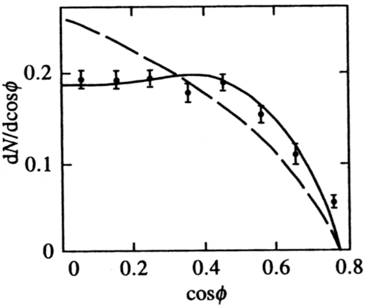


図15.7 TASSO実験において測定された3-ジェット事象の角度分布データ．角度 ϕ は本文中に定義してある．破線はスピン0のグルーオンを想定した理論予想，実線はスピン1のグルーオンを想定した理論予想である．(R. Brandelik et al., Physics Letters **B97** (1980) 453; S. -L. Wu, Physics Reports **107** (1984) 59による．)

布はグルーオンのスピンに対して敏感である．測定された角度分布を，QCDで想定されるスピン1のグルーオンの場合の理論予想，および仮説的にスピン0と置いた予想と比較して図15.7に示す．実験結果はQCDの予想とよく一致している．断面積の大きさは，図14.4(a) (p.379)のクォーク-グルーオン結節点(ヴァーテックス)における相互作用の強さ，

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}$$

に直接比例しており，測定された頻度から $\alpha_s \approx 0.14$ と見積られる[2)]．このように比較的弱く見積もられる結合強度と，1 f程度において見られる非常に強い力との齟齬の辻褄を合せるためには，繰り込みと繰り込み群に関する議論が必要となる．この問題を，次節から取り上げることにしよう．

15.2 繰り込みの体系：修正極小減算法

第9章と第10章の繰り込みの議論では"質量殻上の体系(オン・シェル スキーム)"を採用した．すなわち自由な物理的電子の静的な性質を，理論の基本パラメーターとして扱った[†]．しかしクォークは常に強粒子(ハドロン)に閉じ込められており，"自由なクォーク"の性質を観測する

[2)] より正確な推定のためには，高次の補正までを考慮しなければならない．この問題については15.5節で再び考える．

[†] (訳註) 4元運動量空間において $\not{p} = m$ (物理的な質量) を満たす曲面を，質量殻と称する．

ことはできないので，この方法はQCDに関しては不便である．しかしながら同じ物理的な結果を導くような，別の繰り込みの枠組みも存在する．最もよく知られているものは“修正された極小減算の体系”(modified minimal subtraction scheme) であり，$\overline{\mathrm{MS}}$と記される．この後に簡単に見るように，この体系では任意の質量尺度(スケール)が理論に導入されており，物理的な予言を変えることなく質量尺度を変化させる自由度により，いわゆる“繰り込み群方程式”(renormalization group equation) がもたらされる．この方程式を利用すると，大きい運動量における理論の挙動，すなわち短距離相互作用の挙動を調べることができ，QCDの場合には漸近的自由性が導かれる．

本節と次節において，我々はQEDの文脈において$\overline{\mathrm{MS}}$の繰り込みと繰り込み群方程式を導入し，これが漸近的自由性を導かないことを強調する．それから15.4節においてQCDにこの方法を適用し，QCDに漸近的自由性をもたらすことになる違いを理解する．

15.2.1　電子の伝播関数

本節では，運動量空間における電子の伝播関数を2次の摂動論で考察することにより，$\overline{\mathrm{MS}}$体系(スキーム)を導入する．9.3節で見たように，電子の伝播関数は次式で与えられる[3)](式(9.24)参照).

$$G(p) = \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - m_0 + e_0^2 \Sigma(p) + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{15.7a}$$

m_0は裸の電子質量，e_0は裸の電子電荷である．発散する自己エネルギー項$e_0^2\Sigma(p)$は図9.9 (p.198) のループ補正から生じ，次式で与えられる (式(9.4)参照).

$$\mathrm{i}e_0^2\Sigma(p) = \frac{(\mathrm{i}e_0)^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\alpha\beta}(k)\gamma^\alpha \mathrm{i}S_\mathrm{F}(p-k)\gamma^\beta \tag{15.7b}$$

式(15.7a)と式(15.7b)は，繰り込みと，繰り込みの体系には依存しない式である．しかし$\overline{\mathrm{MS}}$体系は次元正則化の文脈において定義される．つまり式(15.7b)を，

$$D = 4 - \eta$$

と設定されるD次元へと一般化した次式に立脚する．

$$\mathrm{i}e_0^2\Sigma(p) = \frac{(\mathrm{i}\tilde{e}_0)^2\mu^2}{(2\pi)^D}\int \mathrm{d}^4k\,\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\alpha\beta}(k)\gamma^\alpha \mathrm{i}S_\mathrm{F}(p-k)\gamma^\beta \tag{15.8}$$

μは10.3.1項で論じた次元正則化に関係する質量尺度(スケール)であり，

3) これ以降の議論は，第9章で質量殻上 (オン・シェル) の体系で与えた議論と類似関係を持つ．

$$\tilde{e}_0 = \mu^{-\eta/2} e_0 \tag{15.9}$$

は無次元の裸の結合である(式(10.31)参照). こうすると10.3-10.5節で論じた技法を用いて式(15.8)の積分を評価することができる. その結果, 次式が得られる(式(10.73a,b)参照).

$$e_0^2 \Sigma(p) = \frac{\tilde{e}_0^2}{16\pi^2}(\not{p} - 4m_0)\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \tilde{e}_0^2 \Sigma_r(p) \tag{15.10a}$$

ここで,

$$16\pi^2 \Sigma_r(p) = 2m_0 - \not{p} - 2\int_0^1 \mathrm{d}z \left[\not{p}(1-z) - 2m_0\right] \ln\left(\frac{m_0^2 z - p^2 z(1-z)}{\mu^2}\right) \tag{15.10b}$$

は有限である. $\eta \to 0$ と置いて元の理論を復元したときに消滅する項は省いた.

次元正則化の枠内で, 繰り込みの体系が異なるということは, 式(15.10)の有限部分と発散定数への分割方法に違いがあることを意味する. 発散定数の部分は, 繰り込まれた形で再定義される物理パラメーターに吸収される. $\overline{\mathrm{MS}}$体系においては, この発散定数が常に次の因子に比例するように選ばれる.

$$\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] \tag{15.11}$$

すなわちこれは, 極の項にEuler(オイラー)定数 γ の項と $\ln 4\pi$ を付け加えた因子である[4]. 2次摂動では, 繰り込みの目的は, 発散定数 A', B' を,

$$A' = \frac{-m_0}{4\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] \tag{15.12a}$$

$$B' = \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] \tag{15.12b}$$

と定義して, 式(15.10a)を,

$$\Sigma(p) = A' + B'\not{p} + \Sigma_r(p) \tag{15.13}$$

とすることで達成される. 残りの手続きは9.3節における質量殻上(オン・シェル)の体系の場合とよく似ている. 式(15.13)を式(15.7a)に代入すると, 得られる式は,

$$G(p) = \frac{\mathrm{i}Z_2}{\not{p} - m_r + e_r^2 \Sigma_r(p) + \mathrm{i}\varepsilon} + O(\tilde{e}_0^4) \tag{15.14}$$

[4] $\overline{\mathrm{MS}}$でなく, “極小減算の体系”MSの場合には, 発散定数が η^{-1} に比例するように選ばれる. すなわちMSでは極の項だけが発散定数に関わる.

という形となり，関係する定数は次のように定義される[5]．

$$Z_2 = 1 - e_r^2 B', \qquad m_r = Z_2(m_0 - e_r^2 A') \tag{15.15}$$

そして，

$$e_r \equiv \tilde{e}_0 Z_2^{1/2} \tag{15.16a}$$

であるが，これは，

$$e_r = \tilde{e}_0 + O(e_r^3) \tag{15.16b}$$

を含意する．“裸の伝播関数”の式(15.14)における繰り込み定数 Z_2 は，接続している２つの結節点（ヴァーテックス）における電荷の繰り込み(15.16a)に吸収されるものと見ると，“繰り込まれた伝播関数”$G_r(p)$ を，

$$G_r(p) = \frac{\mathrm{i}}{\not{p} - m_r + e_r^2 \Sigma_r(p) + \mathrm{i}\epsilon} + O(e_r^4) \tag{15.17}$$

と書ける．この“繰り込まれた伝播関数”の定義は次式となる．

$$G_r(p) \equiv Z_2^{-1} G(p) \tag{15.18}$$

式(15.16a)と式(15.18)において等号ではなく定義式の記号を用いたのは，これが摂動論のすべての次数における定義として成立すべきことを意味している．高次項を考慮すると Z_2 の値自体は修正されるが，これらの式は保持されるものと見る．

式(15.17)は，２次の電子伝播関数に関する最終的な結果を表している．見て分かるように，これは２つのパラメーター，すなわち繰り込まれた質量と繰り込まれた電荷に依存し，かつ元の理論が復元される $\eta \to 0$ の極限において有限でよく定義されている関数 $\Sigma_r(p)$ に依存して決まる．しかしながら，我々が明らかに任意の質量尺度 μ には依存しない裸の伝播関数(15.7)から出発しているにしても，$\Sigma_r(p)$ や，そこから得られる $G_r(p)$ は，この質量尺度 μ に依存し，$\eta \to 0$ の極限でも μ への依存性は残る．このような事情を式(15.10b)において見て取ることができる．

第9章の質量殻上（オン・シェル）の繰り込み体系では，繰り込まれた質量は“物理的な”電子質量と同じものであった．これに比べて式(15.17)における繰り込み質量 m_r は物理的な質量と等しいわけではないが，伝播関数が物理的な質量 $\not{p} = m$ において極をもたなければならないことを想起すれば，物理的な質量と容易に関係づけることもできる．極は式(15.17)の分母をゼロにする条件のところでのみ生じ得る．これは，

[5] 式(15.15)によって定義される Z_2 は，質量殻上(オン・シェル)で定義されている式(9.35)と似た役割を果たすけれども，同じものではないことを強調しておく．

$$m - m_r + e_r^2 \Sigma_r(\not{p} = m) = 0 \tag{15.19}$$

という条件になる．$\Sigma_r(\not{p} = m)$ は，2次までで考えると，式(15.10b) において $\not{p} = m$ を代入し，$m = m_r + O(e_r^2)$ に注意することで与えられる．物理的な質量は明らかに μ には依存せず有限であり，また式(15.10b) によれば $\Sigma_r(\not{p} = m)$ は有限で μ に依存するので，直ちに繰り込まれた質量 $m_r = m_r(\mu)$ が有限で質量尺度に依存することが分かる．

15.2.2 光子の伝播関数

電荷についても前項に対応する結果を得るために，光子の伝播関数と結節点因子（ヴァーテックス）への輻射補正から，電荷の繰り込みへの寄与を考察する必要がある．

2次までにおいて，光子の伝播関数に対する輻射補正は，光子の自己エネルギー部分から生じる (式(9.8)参照)．

$$\mathrm{i}e_0^2 \Pi^{\mu\nu}(k) = \frac{(\mathrm{i}e_0)^2}{(2\pi)^4} \int \mathrm{d}^4 p \, \frac{\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m_0)\gamma^\nu(\not{p} + m_0)]}{[(p+k)^2 - m_0^2 + \mathrm{i}\varepsilon][p^2 - m_0^2 + \mathrm{i}\varepsilon]} \tag{15.20}$$

これは Lorentz 不変性の要請から，次の形を持つ (式(9.11)参照)．

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu}A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \tag{15.21}$$

これを考慮すると，図9.8 (p.194) に描いてあるように，光子の伝播関数は次の形になる (式(9.13)参照)．

$$G^{\alpha\beta}(k) = \frac{-\mathrm{i}g^{\alpha\beta}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon + e_0^2 A(k^2)} + O(e_0^4) \tag{15.22}$$

ここで再び，議論を簡単にするためにゲージ依存項を無視した[6]．

ここから次元正則化の体系へと議論を特化する．光子の自己エネルギー部分(15.20) は10.4節で具体的な評価を行っており，式(9.11), (10.48), (10.52b) を組み合わせることで，$A(k^2)$ の結果が得られる．

$$e_0^2 A(k^2) = \tilde{e}_0^2 \frac{k^2}{12\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \tilde{e}_0^2 k^2 \Pi_r(k^2) \tag{15.23}$$

$$\Pi_r(k^2) = \frac{-1}{2\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}z\, z(1-z) \ln\left[\frac{m^2 - k^2 z(1-z)}{\mu^2}\right] \tag{15.24}$$

ここでも $\eta \to 0$ のときに消滅する項は省いた．

---

[6] 9.2節の式(9.11) のところの議論を参照．

電子の伝播関数のところで述べたように，$\overline{\mathrm{MS}}$体系は，因子(15.11)に比例する発散定数が，再定義する物理パラメーターに吸収されるということで特徴づけられる．この場合は，繰り込まれた電荷を次のように定義する[7]．

$$e_r \equiv Z_3^{1/2}\tilde{e}_0 \tag{15.25}$$

ここでの繰り込み定数は，２次までで，

$$Z_3 = 1 - \frac{\tilde{e}_0^2}{12\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right]$$

であるが，$e_r = \tilde{e}_0 + O(e_r^3)$ なので，より便利な形として，

$$Z_3 = 1 - \frac{\tilde{e}_r^2}{12\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] \tag{15.26}$$

と書いてもよい．式(15.23)は，

$$e_0^2 A(k^2) = k^2\left[1 - Z_3 + e_r^2\Pi_r(k^2)\right] + O(e_r^4)$$

と表され，これを式(15.22)に代入すると，裸の伝播関数は，

$$G^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{-\mathrm{i}Z_3 g^{\alpha\beta}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon + e_r^2 k^2\Pi_r(k^2)} \tag{15.27}$$

となる．最後に，裸の伝播関数(15.27)における因子 Z_3を，伝播関数線が接続している２つの結節点(ヴァーテックス)における裸の電荷への繰り込み(15.25)に吸収させると，光子伝播関数の最終的な結果として，次式が得られる．

$$G_r^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{-\mathrm{i}g^{\alpha\beta}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon + e_r^2\Pi_r(k^2)} + O(e_r^4) \tag{15.28}$$

$$G_r^{\alpha\beta}(k^2) \equiv Z_3^{-1}G^{\alpha\beta}(k^2) \tag{15.29}$$

繰り込まれた電子の伝播関数(15.17)と同様に，この繰り込まれた光子の伝播関数も，有限ではあるが，元の理論を復元する $\eta = 0$ の極限でも μ に依存する．

15.2.3　電荷の繰り込み

電荷の繰り込みへの第３の寄与は，２次では図9.13 (p.206) の結節点(ヴァーテックス)補正から生じるが，これは次の結節点(ヴァーテックス)因子を与える (式(9.47)参照)．

$$\mathrm{i}\Gamma^\mu(p', p) = \mathrm{i}e_0\left[\gamma^\mu + e_0^2\Lambda^\mu(p', p)\right] \tag{15.30}$$

[7] 電荷の繰り込みへの３つの寄与をそれぞれ論じる際に，他の２つの寄与は無視する．３つの繰り込みを，この後の式(15.35)において組み合わせることになる．

$\Lambda^\mu(p', p)$ は発散積分(9.48)によって与えられる．次元を $D = 4 - \eta$ へ一般化しても，

$$\mathrm{i}\Gamma^\mu(p', p) = \mathrm{i}e_0\left[\gamma^\mu + e_0^2\Lambda^\mu(p', p)\right] \tag{15.31}$$

であるが，ここで $e_0^2\Lambda^\mu(p', p)$ は式(10.55)によって与えられる．この項の評価方法は10.5節で詳しく論じたが，$\Lambda^\mu(p', p)$ の発散への寄与は，式(10.65)の項だけから生じる．式(10.65)の丸括弧内の項について積分を実行すると，$\Lambda^\mu(p', p)$ が次の形を持つという結果が得られる．

$$e_0^2\Lambda^\mu(p', p) = \frac{\tilde{e}_0^2\gamma^\mu}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \tilde{e}_0^2\Lambda_r^\mu(p', p) \tag{15.32}$$

ここで $\Lambda_r^\mu(p', p)$ は有限で，μ に依存する．この具体的な式はこれから先，不要であるが，10.5節で示したように，ここから電子の異常磁気能率が与えられる．異常磁気能率はもちろん μ には依存しない．ここでは単に，式(15.32)を式(15.31)に代入して，

$$Z_1 = 1 - \frac{e_r^2}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] \tag{15.33}$$

と定義すると，次式が得られることを指摘しておく．

$$\mathrm{i}\Gamma^\mu(p', p) = \mathrm{i}e_r\mu^{\eta/2}\left[\gamma^\mu + \tilde{e}_0^2\Lambda_r^\mu(p', p)\right] + O(e_0^5) \tag{15.34}$$

ここでの繰り込まれた電荷は，次式で定義される．

$$e_r \equiv \frac{\tilde{e}_0}{Z_1} \tag{15.35}$$

最後に，ここで得た結節点（ヴァーテックス）補正に伴う電荷の繰り込み(15.35)を，電子の自己エネルギーによる電荷の繰り込み(15.16a)，光子の自己エネルギー部分による電荷の繰り込み(15.25)と組み合わせてみよう．これを行うにあたり，我々はフェルミオン線や光子線がそれぞれ結合している２つの結節点（ヴァーテックス）それぞれに因子 $Z_2^{1/2}$ と因子 $Z_3^{1/2}$ を吸収させたことを念頭に置く必要がある．各結節点（ヴァーテックス）には２本のフェルミオン線と１本の光子線が接続しているので，これにより繰り込まれた結節（ヴァーテックス）部分は，

$$\Gamma_r^\mu(p', p) \equiv Z_2 Z_3^{1/2}\Gamma^\mu(p', p) \tag{15.36}$$

となり，ここに式(15.34)と式(15.35)を代入すると，次式が得られる．

$$\mathrm{i}\Gamma_r^\mu(p', p) = \mathrm{i}e_r\mu^{\eta/2}\left[\gamma^\mu + e_r^2\Lambda^\mu(p', p)\right] + O(e_r^5) \tag{15.37}$$

ここで e_r は，今や完全に繰り込まれた電荷であり，次式で定義される．

$$e_r \equiv \tilde{e}_0 \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} = e_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} \tag{15.38}$$

上式では式(15.9)を用いた．さらにWard恒等式として，

$$Z_1 = Z_2 \tag{15.39}$$

が満たされるので(式(15.12b), (15.15), (15.33))，e_r の定義式は更に簡単になる．

$$e_r = e_0 \mu^{-\eta/2} Z_3^{1/2} \tag{15.40}$$

Z_3 は式(15.26)によって与えられる．

式(15.40)で定義される繰り込まれた電荷 e_r は，繰り込まれた質量 m_r と同様に，有限で，かつ質量尺度(スケール) μ に依存する．すなわち $m_r = m_r(\mu)$，$e_r = e_r(\mu)$ と表され，この μ 依存性のために前者は“走行質量”(running mass)，後者は“走行電荷”(running charge)もしくは“走行結合”(running coupling)と呼ばれる．質量尺度を指定すると，これらは理論の基本パラメーターになる．しかしながら物理的な観測量はすべて μ に依存してはならないので，この質量尺度に関する不変性から，繰り込み群方程式が導かれる．この方程式により，質量尺度 μ を大きくするほど，$e_r(\mu)$ は相互作用の強さを，より短い距離において計るという関係が示される．このことは次の15.3節で論じる．ここで式(15.40)と式(15.26)が，次の関係を含意することを指摘しておく．

$$\mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} = \frac{e_r^3}{24\pi^2} + O(e_r^5) \tag{15.41}$$

ここでは4次元の極限すなわち $\eta \to 0$ と置いた．この式から μ を大きくすると $e_r(\mu)$ も増大することが分かるが，15.3.3項で詳しく論じるようにQEDにおいて，この結合が強まる効果は小さい．これとは対照的にQCDでは μ への依存性が顕著に現れ，結合強度は μ を大きくすると逆に弱くなる．これが漸近的自由性を導くことを15.4節で見る予定である．しかしながら，まずは繰り込み群方程式に戻って，短距離における相互作用の強度と，質量尺度 μ を大きくしたときの走行結合定数の関係を調べることにしよう．

15.3　繰り込み群

本節では，まず繰り込み群方程式を導き，それを用いて15.3.2項と15.3.3項において，運動量の移行が大きいところでの理論の挙動，すなわち短距離における理論の挙動を調べることにする．

15.3.1　繰り込み群方程式

繰り込み群方程式は，固有結節部分関数 $\Gamma^{fb}(p_1, p_2, \ldots, p_{b+f})$ を用いて表される．f と b は，それぞれフェルミオン外線と光子外線の本数である．各外線の４元運動量を p_i $(i = 1, 2, \ldots, b+f)$ とすると，エネルギー-運動量保存により，

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{b+f} = 0$$

である．結節部分関数は，既に $b = 2$, $f = 2$ の場合について 12.2.4項で導入しており (式(12.36))，それが物理過程の行列要素と密接に関係することを 12.3節で示してある．一般に $n = b + f > 2$ の結節部分関数は，連結 Green 関数から“脚”にあたる伝播関数因子を除いた関数にあたる．固有結節部分関数とは，与えられた結節部分関数に対して寄与を持つすべての１粒子既約なグラフの和である．“１粒子既約”とは，１本の線分だけを切断することで２つの部分に分割できないことを意味する．固有結節部分は一般的な議論のために有用となるが，それは任意の Green 関数が，図15.8に示すように固有結節部分と伝播関数によって表現できるからである．２点結節部分が，

$$\Gamma^{20}(p) = e_0^2\,\Sigma(p), \qquad \Gamma^{02}(k) = e_0^2\,\Pi^{\mu\nu}(k) \tag{15.42}$$

のように，電子の自己エネルギー部分 $e_0^2\,\Sigma(p)$ と，光子の自己エネルギー部分 $e_0^2\,\Pi^{\mu\nu}(k)$ によって定義されることを 9.2節，9.3節，9.8節において論じた．逆に，電子と光子の伝播関数を２点結節部分 (式(15.42)) を用いて，式(9.101) と式(9.105) を通じて表すこともできる．我々は結節部分に言及するときに，式(15.42) のように Lorentz 添字の表記をしばしば省略する．たとえば式(15.30) の３点結節部分は次のように書かれる．

$$\mathrm{i}\,\Gamma^{21}(p', p) = \mathrm{i}\,\Gamma^{\mu}(p', p) = \mathrm{i}e_0\left[\gamma^{\mu} + e_0^2\,\Lambda^{\mu}(p', p)\right] \tag{15.43}$$

式(15.43) のような元々の結節部分関数と，自己エネルギー部分(15.7b), (15.20) は，裸の質量と電荷 m_0 と e_0 に依存しており，元の理論を復元する $\eta \to 0$ の極限では，よく定義されていない．しかしながら繰り込みによって，結節部分関数は，それに接続しているフェルミオン伝播関数と光子伝播関数から因子 $Z_2^{1/2}$ と $Z_3^{1/2}$ を吸収することになり，繰り込まれた結節部分関数は，μ に依存する繰り込まれた質量 m_r と繰り込まれた電荷 e_r によって表される．すなわち，

$$\Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu) = Z_2^{f/2}\, Z_3^{b/2}\, \Gamma^{fb}(p_i, m_0, e_0) \tag{15.44}$$

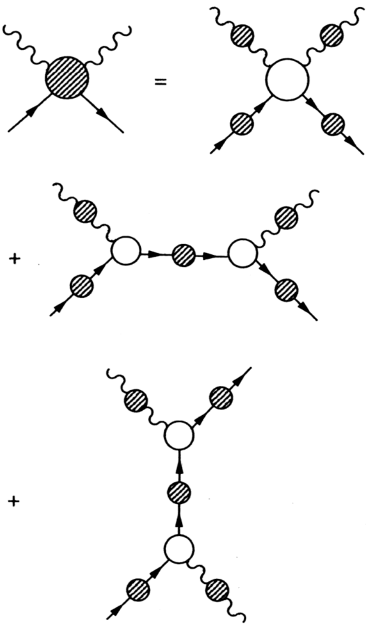


図15.8　固有結節部分関数 (白い円) と物理的な伝播関数を用いた連結Green関数の分解.

となる. 繰り込まれた結節部分関数(ヴァーテックス) Γ_r^{fb} の方は $\eta \to 0$ として元の理論を復元しても有限であるが, μ に依存する. この μ に対する依存性を決める微分方程式は,

$$\Gamma^{fb}(p_i, m_0, e_0) = Z_2^{-f/2} Z_3^{-b/2}\, \Gamma_r(p_i, m_r, e_r, \mu)$$

を, 次の自明な式に代入することで得られる.

$$\mu \frac{\mathrm{d}\Gamma^{fb}}{\mathrm{d}\mu}(p_i, m_0, e_0) = 0$$

その微分方程式は, 次のようになる.

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial e_r} - f\gamma_2 - b\gamma_3 + m_r \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_r}\right] \Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, e_r, \mu) = 0 \qquad (15.45)$$

$$\beta \equiv \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} \qquad (15.46a)$$

$$\gamma_2 \equiv \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial \mu}(\ln Z_2) \qquad (15.46b)$$

$$\gamma_3 \equiv \frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial\mu}(\ln Z_3) \tag{15.46c}$$

$$m_r\gamma_m \equiv \mu\frac{\partial m_r}{\partial\mu} \tag{15.46d}$$

式(15.45)は't Hooft-Weinberg(ト・フーフト ワインバーグ)方程式と呼ばれており，我々が採用している極小減算の体系に適した繰り込み群方程式である．しかしこれを利用する前に，これを結節部分(ヴァーテックス)のスケーリングの性質から導かれる微分方程式と関係づけておかなければならない．

15.3.2 スケール変換

大きい運動量における理論の挙動を導くために，次の結節部分関数(ヴァーテックス)を考える．

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) \tag{15.47}$$

t は無次元のスケール変数である．この量が従う微分方程式は，繰り込み群方程式(15.45)を，次のスケール変換から得られる，もうひとつの式と組み合わせることによって与えられる．

$$p_i,\ t^{-1}m_r,\ t^{-1}\mu \quad \longleftrightarrow \quad tp_i,\ m_r,\ \mu \tag{15.48}$$

この変換の下で，固有結節部分(ヴァーテックス)は，次のように変換する必要がある．

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = t^d\Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu) \tag{15.49}$$

次元を持つ引数すべてが同じ変数 t によってスケールされているので，d は結節部分(ヴァーテックス)の自然次元(自然単位系の次元)である．式(15.49)の両辺を t に関して微分し，次の恒等式，

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu) = -\left(m_r\frac{\partial}{\partial m_r} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\Gamma_r^{fb}(p_i, t^{-1}m_r, e_r, t^{-1}\mu)$$

と，式(15.49)を共に利用すると，$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu)$ は次の微分方程式を満たすことが分かる．

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t} + m_r\frac{\partial}{\partial m_r} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} - d\right)\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = 0 \tag{15.50}$$

式(15.50)と式(15.45)を比べると，$\partial\Gamma_r/\partial\mu$ を消去することができて，次式が得られる．

$$\left[t\frac{\partial}{\partial t} - \beta\frac{\partial}{\partial e_r} - m_r(\gamma_m - 1)\frac{\partial}{\partial m_r} + f\gamma_2 + b\gamma_3 - d\right]\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu) = 0 \tag{15.51}$$

式(15.51)は結節部分(ヴァーテックス)において運動量だけにスケール変換を施すときの依存性を支配する微分方程式である．しかしこれを解く前に，結節部分(ヴァーテックス) Γ_r^{fb} の自然次元 d を評価する必要がある．表6.1 (p.103) に与えてある場の自然次元から，Green関数(12.1)の自然次元は光子の脚(あし)の本数を b，フェルミオンの脚(あし)の本数を f とすると $(b+3f/2)$ となることが容易に分かる．これに対応する運動量空間のGreen関数の次元は，式(12.10)に従い，

$$4 - \frac{5}{2}f - 3b$$

と与えられる．結節部分(ヴァーテックス)はGreen関数から脚(あし)にあたる伝播関数を除くことで得られるので，結節部分(ヴァーテックス) Γ_r^{fb} の自然次元は次式で与えられる．

$$d = 4 - \frac{3}{2}f - b \tag{15.52}$$

式(15.51)を，繰り込みの質量尺度を $\mu = \mu_0$ と選んで解いてみよう．

$$\left[t\frac{\partial}{\partial t} - \beta\frac{\partial}{\partial e_r} - m_r(\gamma_m - 1)\frac{\partial}{\partial m_r} + f\gamma_2 + b\gamma_3 - d\right]\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0) = 0 \tag{15.53}$$

この式は，繰り込み尺度を固定したときに，スケール変数 t の微小変化が m_r と e_r の微小変化に係数因子の掛かった量によって補償されるという意味を持つ．ここで，次の形の解を探すことにする．

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0) = \Lambda(t)\,\Gamma_r^{fb}\big(p_i, \tilde{m}(t), \tilde{e}(t), \mu_0\big) \tag{15.54}$$

$\Lambda(t)$ と $\tilde{m}(t)$ と $\tilde{e}(t)$ は，これから決めるべき関数であるが，次の境界条件を満たす．

$$\Lambda(1) = 1, \quad \tilde{m}(1) = m_r(\mu_0), \quad \tilde{e}(1) = e_r(\mu_0) \tag{15.55}$$

式(15.54)を，t について微分する．

$$\begin{aligned} &t\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0) \\ &\quad = \left(t\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} + t\Lambda\frac{\partial\tilde{m}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tilde{m}} + t\Lambda\frac{\partial\tilde{e}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tilde{e}}\right)\Gamma_r^{fb}\big(p_i, \tilde{m}(t), \tilde{e}(t), \mu_0\big) \end{aligned}$$

ここから，式(15.54)を利用すると，次式が得られる．

$$t\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0)$$
$$= \left(\frac{t}{\Lambda}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} + t\frac{\partial\tilde{m}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tilde{m}} + t\frac{\partial\tilde{e}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tilde{e}}\right)\Gamma_r^{fb}\big(tp_i, m_r, e_r, \mu_0\big) \tag{15.56a}$$

ここでは m_r と e_r を μ_0 において評価している．すなわち，

$$m_r \equiv m_r(\mu_0) = \tilde{m}(1), \quad e_r \equiv e_r(\mu_0) = \tilde{e}(1)$$

である．式(15.56)と式(15.53)を比較すると，次のように置くことで両者が整合することが分かる．

$$t\frac{\partial\tilde{m}}{\partial t} = m_r(\gamma_m - 1) \tag{15.57a}$$

$$t\frac{\partial\tilde{e}}{\partial t} = \beta \tag{15.57b}$$

$$\frac{t}{\Lambda}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} = d - f\gamma_2 - b\gamma_3 \tag{15.58}$$

式(15.57a,b)と式(15.46a,b)を比較すると，境界条件(15.55)の下で，

$$\tilde{m}(t) = t^{-1}m_r(\mu = t\mu_0), \quad \tilde{e}(t) = e_r(\mu = t\mu_0) \tag{15.59}$$

と置けば，式(15.57a,b)が満たされることになる．最後に式(15.58)を積分すると，

$$\Lambda(t) = t^d \exp\left[-\int_1^t \frac{(f\gamma_2 + b\gamma_3)\,\mathrm{d}t}{t}\right] \tag{15.60}$$

となり，式(15.59)と式(15.60)を式(15.54)に代入すると，次式が得られる．

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r, e_r, \mu_0)$$
$$= t^d \exp\left[-\int_1^t \frac{(f\gamma_2 + b\gamma_3)}{t}\,\mathrm{d}t\right]\Gamma_r^{fb}\big(p_i, t^{-1}m_r(t\mu_0), e_r(t\mu_0), \mu_0\big) \tag{15.61}$$

これが結節部分（ヴァーテックス）の運動量スケール依存性の解を，走行質量[8] $\tilde{m}(t) = t^{-1}m_r(t\mu_0)$ と走行結合 $e_r(t\mu_0)$ を用いて表したものである．

式(15.61)の興味深い特徴は，電子質量がゼロの極限における挙動を考察することによって明らかになる．QEDにおける他のパラメーターは電荷だけであり，これは自然単位系において無次元なので，この極限においてラグランジアンはエネルギー尺

[8] 一般の文献において $\tilde{m}(t)$ も $m_r(\mu)$ も“走行質量”(running mass)として言及されている．これらは異なるものであり，式(15.59)によって関係づけられることを忘れてはならない．

度の変更の下で不変となり，結節部分関数(ヴァーテックス)は，式(15.61)に因子 t^d として表されているような単純な次元スケーリングの挙動に従うことが予想される．すなわち運動量 p_i を引数とする任意の関数 Γ は，自然次元が d であれば，

$$\Gamma(tp_i, e_r) = t^d \Gamma(p_i, e_r)$$

のようなスケーリングに従うものと予想される．この質量ゼロの理論には，次元を持つパラメーターがないからである．しかしながら繰り込みは不可避的に理論に質量尺度 μ を導入することになり，式(15.61)は単純な次元スケーリングから外れる．

$$\Gamma_r^{fb}(tp_i, m_r\!=\!0, e_r, \mu) \neq t^d \Gamma_r^{fb}(p_i, m_r\!=\!0, e_r, \mu)$$

これは走行質量，走行結合定数，およびゼロにならない“異常次元”γ_2 と γ_3 のためである．質量尺度 μ の値は完全に任意ではあるが，これが導入されることは物理的な帰結である．

15.3.3　走行電荷

我々は 15.3.1 項と15.3.2 項において，繰り込み定数の具体的な式の使用を避けて，すべての摂動次数で成立する形の結果を示してきた．ここでは最低次の輻射補正に話を限定して，高い質量尺度 $\mu = t\mu_0$ における走行電荷の挙動を調べる．この部分の挙動が大きな運動量 tp_i における結節部分関数(ヴァーテックス)の挙動を決めることになる．これを行うために，式(15.46a)を，式(15.40)と2次の結果(15.26)とを用いて評価すると(式(15.41)参照)，$\eta = D - 4 \to 0$ の極限において次式を得る．

$$\beta = \mu \frac{\partial e_r}{\partial \mu} = \beta_0 e_r^3 + O(e_r^5) \tag{15.62a}$$

$$\beta_0 = \frac{1}{24\pi^2} \tag{15.62b}$$

式(15.62a)は容易に解けて，2次までで，

$$e_r^2(\mu) = \frac{e_r^2(\mu_0)}{1 - \beta_0 e_r^2(\mu_0) \ln(\mu^2/\mu_0^2)} \tag{15.63}$$

と与えられる．QEDでは $\beta_0 > 0$ なので，走行結合すなわち走行電荷 $e_r(\mu)$ は μ を大きくすると増加する．ただし $t = \mu/\mu_0$ が非常に大きくならない限り，この効果はほとんど目立たない．

この結果を定性的に理解するには，誘電媒質中の電荷 Q との類推を考えればよい．電荷が正であれば，誘電体におけるその周囲の分子は，図15.9のような配置を取る傾

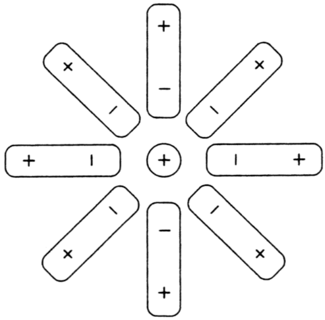


図15.9 誘電体中に正電荷を置いたときの分子の分極の様子を模式的に表した図.

向を持つ. 分子の寸法に比べて充分に遠い距離のところに別の試験電荷を配置した場合, その試験電荷が感受する力は電荷 Q による力そのものではなく, 分極遮蔽のためにこれより小さくなった"有効電荷"$Q_{\rm eff}$ による力である. しかし電荷間の距離を分子の寸法と同等まで近くすると, 遮蔽があまり効かなくなり, 距離が近づくほど $Q_{\rm eff}$ は増加する. QED では, 真空は量子ゆらぎによって仮想的に生成している電子-陽電子対(つい)を含むので, 真空においても同様の遮蔽効果が生じる. たとえば電子-電子散乱 (Møller 散乱) において, 電荷は図9.7(b) (p.193) の Feynman ダイヤグラムにおける仮想電子-陽電子対(つい)によって互いに部分的に遮蔽されているものと見なされる. これが式(15.63) によって定量的に記述される効果の含意である. 同じ分極効果は, アプローチは異なるが第9章でも論じてあり, そこでは非相対論極限において修正された Coulomb ポテンシャル(9.90) を得ている. この結果は大きな移行運動量, あるいは等価的に短距離における相互作用の強さの増加を表しており, このことは 9.6節の末尾において論じたように, Lamb シフトの完全な理解のために不可欠である.

QCD においても量子ゆらぎは存在し, その影響で相互作用の強度はやはり距離尺度によって変動する. クォーク-クォーク散乱を考えると, 1-グルーオン交換 (図15.10) に対して, 最低次の真空偏極 (分極) 補正が 2 通りある. これを図15.11 に示す. 最初の補正は電子-電子散乱における図9.7(b) の過程から直接に類推される補正であり, 遮蔽効果を生じる. しかし図15.11(b) のような第2のダイヤグラムもあり, これは図11.1(b) (p.277) のようなタイプのグルーオン自己相互作用によるグルーオン-グルーオン対(つい)の生成を含む過程である. QED にはこのダイヤグラムに対応する過程が存在せず, その性質は自明ではない. 実際, 次節で示すように, これは"反遮蔽"の効果をもたらす. すなわち短距離になるほど相互作用が弱くなるという効果が

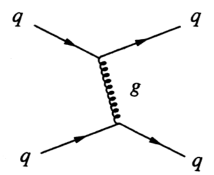


図15.10 グルーオン交換によるクォーク-クォーク散乱.

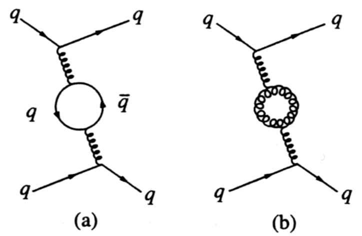


図15.11 1-グルーオン交換によるクォーク-クォーク散乱への最低次の2つの真空偏極補正.

現れる.この効果は図15.11(a)の遮蔽による補正効果よりも顕著であり,正味の結果として短距離ほど,すなわち運動量の移行が大きいほど相互作用が弱くなる.すなわち漸近的自由性が結論される.

15.4 強い相互作用の結合定数

本節では15.2節と15.3節に与えたQEDに関する議論を,QCDへと拡張する.そして,次の結果を得る予定である.

$$g_r = g_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} \tag{15.64}$$

強い相互作用の結合を g_s と書く代わりに,g_0 と g_r を用いて,それぞれ裸の結合と繰り込まれた結合を表すものとする.μ は繰り込み尺度であり,Z_3, Z_2, Z_1 はそれぞれグルーオン伝播関数,クォーク伝播関数,クォーク-グルーオン結節(ヴァーテックス)部分に関わる繰り込み定数である.式(15.64)はQEDにおける式(15.38)と極めて近い関係にあり,同様の方法で結合のスケール依存をここから決めることができる.

繰り込み群のQCDへの適用は,些細な修正はあるにしても,本質的にはQEDに対する適用と同じである.これについて次の15.5節で扱い,その応用にも言及す

る．そして式(15.64)と具体的な繰り込み定数の値も導き，それを用いて強い結合のスケール依存性を求める予定である．しかしまず最初に，QCDにおけるすべての摂動計算に関わる“色因子”(colour factor)について論じる．これは後の考察のための準備として必要となるものである．

15.4.1 色因子

図14.4 (p.379)の結節点(ヴァーテックス)因子は，構造係数 f_{ijk} と 3×3 の色行列，

$$T^i = \frac{\lambda^i}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, 8 \tag{15.65}$$

を含んでおり，Feynmanダイヤグラムを計算する際には，これらの量の組合せ(‘色因子’と呼ばれる)を評価する必要がある．本項では，これらの色因子の評価を，後の議論で必要となる範囲において論じる[9]．

構造係数 f_{ijk} は表11.1 (p.277)と式(11.12b)で定義されている．これらは総体的に反対称である．

$$f_{ijk} = f_{jki} = f_{kij} = -f_{jik} = -f_{kji} = -f_{ikj} \tag{15.66}$$

また，次式を容易に証明できる．

$$f_{ijk} f_{ljk} = 3\delta_{il} \tag{15.67}$$

慣例に従い，繰り返されている添字については和を取るものとする．行列 T^i は交換関係(11.12a)を満たす．

$$[T^i, T^j] = \mathrm{i} f_{ijk} T^k \tag{15.68}$$

他の性質として，以下のものがある．

$$\mathrm{Tr}\, T^i = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \lambda_i = 0 \tag{15.69}$$

$$\mathrm{Tr}\,(T^i T^j) = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \tag{15.70}$$

$$T^i T^i = \frac{1}{4} \lambda_i \lambda_i = \frac{4}{3} \tag{15.71}$$

これらは式(11.11b)から証明される．これらの基本的な関係式から，他のいろいろな恒等式が導かれる．本書で後から必要となる式は，

[9] 色因子に関する詳しい議論は，たとえばR. D. Field, *Applications of Perturbative QCD*, Addison-Wesley (1989), Appendix D を参照．

$$\mathrm{i}f_{ijk}T^jT^k = -\frac{3}{2}T^i \tag{15.72}$$

$$T^jT^iT^j = -\frac{1}{6}T^i \tag{15.73}$$

である．これらは次のように導かれる．式 (15.72) を得るために，式(15.68) と構造係数 f_{ijk} の反対称性を用いて，次のように書く．

$$\begin{aligned}\mathrm{i}f_{ijk}T^jT^k &= \mathrm{i}f_{ijk}[T^j,T^k] + \mathrm{i}f_{ijk}T^kT^j \\ &= -f_{ijk}f_{jkl}T^l - \mathrm{i}f_{ikj}T^kT^j \\ &= -f_{ijk}f_{ljk}T^l - \mathrm{i}f_{ijk}T^jT^k\end{aligned}$$

そうすると式(15.72) は，式(15.67) を用いて直接に得られる．式(15.73) については，式(15.68) と式(15.71) を用いて次のように書く．

$$\begin{aligned}T^jT^iT^j &= T^j[T^i,T^j] + T^jT^jT^i \\ &= \mathrm{i}f_{ijk}T^jT^k + \frac{4}{3}T^i\end{aligned}$$

そうすると，式(15.72) を用いて直接に式(15.73) が得られる．

15.4.2 無効ダイヤグラム

式(15.64) における繰り込み定数 Z_2 と Z_3 を計算するために，それぞれクォークとグルーオンの自己エネルギー部分のダイヤグラムを計算する必要がある．これらは14.4節に示した Feynman 規則からの直接の帰結としてゼロになるような，図15.12 に示すループを持つダイヤグラムも含んでいる．図15.12 の (a) と (b) について，この結果はループに付随する色因子から与えられる．両方において，

$$f_{ijk}\delta_{jk} = f_{ijj} = 0$$

となるが，f_{ijk} は図14.4 (p.379) の結節点(ヴァーテックス)因子から生じ，δ_{jk} は図14.3 (p.379) の伝播関数から生じる．図15.12(c) のクォークループによる色因子は，式(15.69) により，

$$(T^i)_{dc}\delta_{cd} = \mathrm{Tr}\,T^i = 0$$

である．最後に，図15.12(d) のループに付随する Lorentz因子と色因子は，

$$F_{ijkl}V_{\mu\nu\sigma\tau}g^{\mu\nu}\delta_{jk} = 0$$

となる．これは式(14.70) を用いて容易に確認することができる．

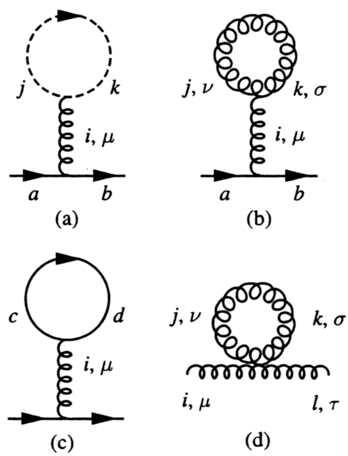


図15.12 ループからの寄与によってゼロになる Feynman グラフの例.

以下の考察において，図15.12 に示したようなループを含むグラフは，それ以上の議論をせずにゼロと置くことにする[10)].

15.4.3 結合定数の繰り込み

本項ではクォークとグルーオンの伝播関数，およびクォーク - グルーオン結節部分（ヴァーテックス）を考察することにより，式(15.64) と繰り込み定数 Z_2, Z_3, Z_1 の具体的な式を導く．議論の内容を，式(15.64) の導出に必要な範囲に限定し，全体を通じて 2 次摂動までを考察する．

クォークの自己エネルギー

2 次のクォーク伝播関数の繰り込みは，図9.9 (p.198) にまとめた電子伝播関数のそれとよく似たものである．ゼロにならないクォークの自己エネルギー部分だけを図15.13 に示す．14.4節の Feynman 規則を用いると，自己エネルギーは次式で与えられる．

$$\mathrm{i}g_0^2\Sigma_{ac}(p) = (\mathrm{i}g_0)^2 C_{ac}\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\alpha\beta}(k)\,\gamma^\alpha \mathrm{i}S_\mathrm{F}(p-k)\,\gamma^\beta \tag{15.74a}$$

10) 正規順序化を利用する正準形式では，これらのダイヤグラムは Wick の定理(6.38) における ‘ no e.t.c.’ の条件 (同時刻縮約の除外) によって自動的に省かれる．

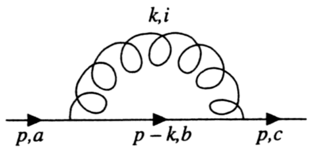


図15.13　2次のクォーク自己エネルギー.

ここでの色因子は，式(15.71)を用いて，次のように与えられる.

$$C_{ac} = T^i_{ab} T^i_{bc} = \frac{4}{3}\delta_{ac} \tag{15.74b}$$

色の保存を考えて $a = c$ と置くと，このクォークの自己エネルギー(15.74)は，電子の自己エネルギー(15.8b)に次の置き換えを施したものと同じである.

$$e_0^2 \;\rightarrow\; 4g_0^2/3 \tag{15.75}$$

したがって15.2.1項に与えた電子伝播関数の議論を，式(15.75)を考慮するだけで，容易に任意の香りを持つ $a = c$ のクォーク伝播関数へ適用できる．裸の伝播関数と繰り込まれた伝播関数は，やはり式(15.18)によって関係づけられる.

$$G_r(p) \equiv Z_2^{-1} G(p) \tag{15.76}$$

繰り込み定数と，繰り込まれた結合定数は(式(15.12b), (15.15), (15.16b)参照),

$$Z_2 = 1 - \frac{g_r^2}{12\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] \tag{15.77}$$

$$g_r \equiv \tilde{g}_0 Z_2^{1/2} \tag{15.78}$$

となる．$\tilde{g}_0$ はQEDの場合(式(15.9))と同様に，次式で与えられる.

$$\tilde{g}_0 = g_0 \mu^{-\eta/2} \tag{15.79}$$

グルーオンの自己エネルギー部分

グルーオン伝播関数の繰り込みは，図15.14のような置き換えによって生じ，光子伝播関数の繰り込みとよく似た方法で扱われる．QEDとの違いは，ゼロでない自己エネルギーダイヤグラムとして，1ループの水準で図15.15に示すような3種類が現れることである．14.4節のFeynman規則を用いてこれらのダイヤグラムを評価することは，直截ではあるが，やや長い作業になる．これについては付録15.6.1で論じる

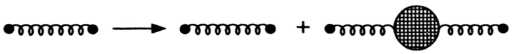


図15.14　修正されたグルーオン伝播関数．2次の自己エネルギー部分は，図15.15に示す3つの Feynmanダイヤグラムによって与えられる．

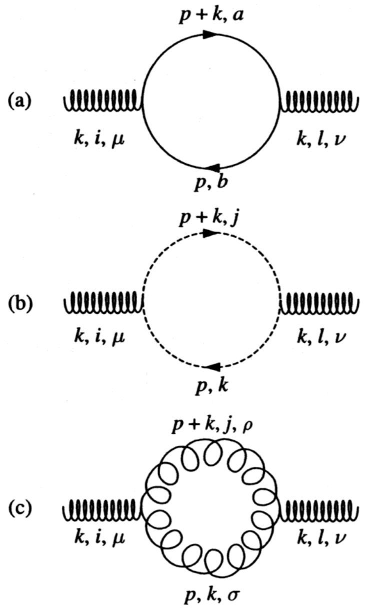


図15.15　グルーオンの自己エネルギーへの2次の寄与．

ことにして，ここではその結果を引用すると，図15.15のクォークループ，ゴーストループ，グルーオンループの寄与は，それぞれ次のように与えられる．

$$\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{ij}^{\mu\nu}(a) = \delta_{ij}\left(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}\right)\frac{\mathrm{i}\tilde{g}_0^2}{24\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots \tag{15.80a}$$

$$\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{ij}^{\mu\nu}(b) = \delta_{ij}\left(k^\mu k^\nu + \frac{k^2 g^{\mu\nu}}{2}\right)\frac{\mathrm{i}\tilde{g}_0^2}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots \tag{15.80b}$$

$$\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{ij}^{\mu\nu}(c) = \delta_{ij}\left(11k^\mu k^\nu - \frac{19}{2}k^2 g^{\mu\nu}\right)\frac{-\mathrm{i}\tilde{g}_0^2}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots \tag{15.80c}$$

ここで ... は発散しない項を表し，以下の議論において不要である．

式(15.80a,b,c)の寄与を組み合わせるにあたり，クォークの香りの種類が $d, u, s, \ldots$ と複数あり，それらすべてが図15.15(a)のクォークループに寄与できることを考慮しなければならない．香りが n_f 種類あるものとしよう(標準模型では $n_f = 6$ である)．グルーオンの自己エネルギー部分として，最終的に次の結果が得られる．

$$\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{ij}^{\mu\nu}(k) = \mathrm{i}\delta_{ij}\,g_0^2\,\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) \tag{15.81a}$$

$$g_0^2\,\tilde{\Pi}^{\mu\nu}(k) = \left(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}\right)\frac{\tilde{g}_0^2}{16\pi^2}\left(\frac{2n_f}{3} - 5\right)\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots \tag{15.81b}$$

これはQEDにおける光子の自己エネルギー部分(式(10.48), (10.52b)参照)，

$$e_0^2\,\Pi^{\mu\nu}(k) = \left(k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}\right)\frac{\tilde{e}_0^2}{12\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots \tag{15.82}$$

と比較すべき式にあたる．

この結果を利用して，グルーオン伝播関数に繰り込みを施さなければならない．図15.13 (p.416)から，グルーオン伝播関数の2次までの式は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned} G_{ij}^{\mu\nu}(k) &= \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(k)\,\delta_{ij} + \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(k)\,\delta_{il}\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{\alpha\beta,lm}(k)\,\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\beta\nu}(k)\,\delta_{mj} \\ &= \left[\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\nu}(k) + \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\mu\alpha}(k)\,\mathrm{i}g_0^2\,\tilde{\Pi}_{\alpha\beta}(k)\,\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\beta\gamma}\right]\delta_{ij} \end{aligned} \tag{15.83}$$

色電荷の保存 $i = j$ を考えると，グルーオン自己エネルギー部分(15.81)と光子自己エネルギー部分(15.82)の違いに応じた次の置き換えが必要となる点を除き，光子伝播関数の式(9.10a)と同じである．

$$\frac{\tilde{e}_0^2}{12\pi^2} \;\to\; \frac{\tilde{g}_0^2}{16\pi^2}\left(\frac{2n_f}{3} - 5\right) \tag{15.84}$$

したがって，これに関する解析を，光子伝播関数に対して15.2.2項に与えたものと同様の手続きで行うことができ，その結果の式(15.25), (15.27), (15.28), (15.29)も，少々修正を施すだけで流用できる．このようにして繰り込まれた結合定数は，

$$g_r \equiv Z_3^{1/2}\,\tilde{g}_0 \tag{15.85}$$

と表され，2次までの繰り込み定数は次式となる．

$$Z_3 = 1 - \frac{g_r^2}{16\pi^2}(2n_f - 5)\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] \tag{15.86}$$

繰り込まれた伝播関数，

$$G_{r,ij}^{\mu\nu}(k) = Z_3^{-1}\,G_{ij}^{\mu\nu}(k) \tag{15.87}$$

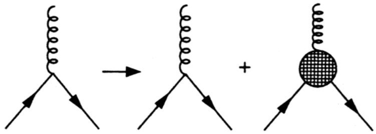


図15.16 クォーク-グルーオン結節点の修正．２次の結節点補正は図15.17のFeynmanグラフで与えられる．

は，次式で与えられる(式(15.25), (15.27)参照).

$$G^{\mu\nu}_{r,ij}(k) = \frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}\delta_{ij}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon + g_r^2 \Pi_r(k^2)} + O(g_r^4) \tag{15.88}$$

$\Pi_r(k^2)$ は４次元の極限 $\eta \to 0$ でも有限となる．

式(15.86)をQEDの対応する式(15.26)と比べると，クォークループの Z_3 への寄与は，QEDにおける電子ループの Z_3 への寄与(15.26)と同じ符号を持つことが見て取れる．QCDにおいて，これに更に加わるグルーオンループとゴーストループの寄与は，逆の符号を持つことになるが，これを調べる前に，結節点(ヴァーテックス)補正を考察しなければならない．

クォーク-グルーオン結節点補正

２次の輻射補正を含めたクォーク-グルーオン結節部分(ヴァーテックス)は，次の形で与えられる．

$$\mathrm{i}\Gamma^{i,\mu}(p',p) = \mathrm{i}g_0\left[\gamma^\mu T^i + g_0^2\Lambda^{i,\mu}(p',p)\right] \tag{15.89}$$

これは図15.16のグラフに対応する．ここではクォークの色の添字を省略している．T^i は 3×3 の色行列(14.58b)を表し，結節点(ヴァーテックス)補正 $g_0^2\Lambda^{i,\mu}(p',p)$ は，図15.17の２つのFeynmanダイヤグラムによって与えられる．これらの評価の方法は，付録15.6.2において論じる予定であるが，図17.17(a)(b)それぞれについて，結果は次のようになる．

$$g_0^2\Lambda^{i,\mu}(p',p) = -\gamma^\mu T^i \frac{\tilde{g}_0^2}{96\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots \tag{15.90a}$$

$$g_0^2\Lambda^{i,\mu}(p',p) = \gamma^\mu T^i \frac{9\tilde{g}_0^2}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots \tag{15.90b}$$

ここでも ... は有限の項を表しており，これ以降の議論には必要でない．これらの寄与を組み合わせると，２次の全結節点(ヴァーテックス)補正として，次式が得られる．

$$g_0^2\Lambda^{i,\mu}(p',p) = \gamma^\mu T^i \frac{13\tilde{g}_0^2}{48\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots \tag{15.91}$$

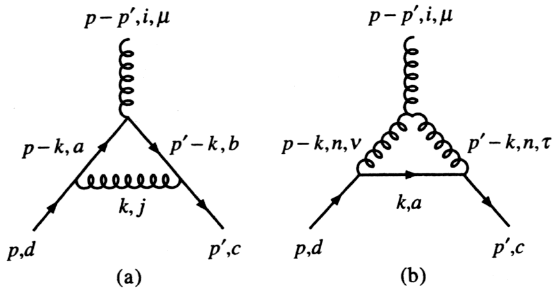


図15.17 2次のクォーク-グルーオン結節点補正.

式(15.91)を式(15.89)に代入し，繰り込み定数を，

$$Z_1 = 1 - \frac{13 g_r^2}{48\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] \tag{15.92}$$

のように定義すると，2次までの式として，次式を得る.

$$\mathrm{i}\Gamma^{i,\mu}(p',p) = \mathrm{i}g_r\mu^{\eta/2}\left[T^i\gamma^\mu + \tilde{g}_0^2\Lambda^{i,\mu}(p',p)\right] \tag{15.93}$$

ここでの繰り込まれた結合は，

$$g_r \equiv \frac{\tilde{g}_0}{Z_1} \tag{15.94}$$

である. $\Lambda_r^{i,\mu}(p',p)$ は結節点(ヴァーテックス)補正の有限な部分で，その具体的な形は必要ではない.

最後に式(15.94)を，他の繰り込みまれた結合の式(15.78), (15.85)と組み合わせる必要がある. QEDの場合と同様に[11)]，因子 $Z_2^{1/2}$, $Z_3^{1/2}$ を，それぞれフェルミオン線とボゾン線に接続している結節部分(ヴァーテックス)に吸収させる. この措置によって，繰り込まれた伝播関数(15.76)と(15.87)の定義において除かれた因子が補償される. この結果，繰り込まれた結節部分(ヴァーテックス)は，

$$\Gamma_r^{i,\mu}(p',p) \equiv Z_2\, Z_3^{1/2}\, \Gamma^{i,\mu}(p',p) \tag{15.95}$$

であり，式(15.93)と式(15.94)を代入すると，

$$\mathrm{i}\Gamma_r^{i,\mu}(p',p) = \mathrm{i}g_r\mu^{\eta/2}\left[T^i\gamma^\mu + g_r^2\Lambda_r^{i,\mu}(p',p) + O(g_r^5)\right] \tag{15.96}$$

11) 式(15.35)のところの議論を参照.

となる．g_r は完全に繰り込まれた結合であり，次式で定義される．

$$g_r \equiv \tilde{g}_0 \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} = g_0 \mu^{-\eta/2} \frac{Z_3^{1/2} Z_2}{Z_1} \tag{15.97}$$

ここでは式(15.79) を用いた．この場合は $Z_1 \neq Z_2$ であり，式(15.97) を QED の式(15.40) のような形に簡約できないことに注意を促しておく．

15.4.4　走行結合

本節では式(15.97) を用いて結合定数のスケール依存性を推定し，その値を実験結果から決定することを考える．

第 1 段階として，式(15.77), (15.86), (15.94) に与えられている繰り込み定数を式(15.97) に代入すると，次式が得られる．

$$g_r = g_0 \mu^{-\eta/2} \left[1 + \frac{g_r^2}{32\pi^2} \left(11 - \frac{2n_f}{3} \right) \left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi \right] + O(g_r^4) \right] \tag{15.98}$$

これが裸の結合と繰り込まれた結合の関係を表す最終的な式である．繰り込まれた結合の μ への依存性は，次式を解くことによって決定される．

$$\beta(g_r) \equiv \mu \frac{\partial g_r}{\partial \mu} = \frac{-\beta_0 g_r^3}{16\pi^2} \tag{15.99}$$

この式は，式(15.98) の 4 次元極限 $\eta \to 0$ において得られ，定数 β_0 は，

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f \tag{15.100}$$

である．g_r^5 のオーダーの項は省いた．クォークの香り $d, u, s, \ldots$ の数 n_f が 17 未満であれば β_0 は正となり，g_r は μ の増加に対して減少する．この結合のスケール依存の形は，微細構造定数 $\alpha \approx 1/137$ と類似した結合の強さ，

$$\alpha_s(\mu) \equiv \frac{g_r^2}{4\pi} \tag{15.101}$$

の形で表現されることが多い．

$\alpha_s(\mu)$ の μ に対する依存性の表し方は，2 通りある．式(15.99) より，

$$\mu \frac{\partial \alpha_s}{\partial \mu} = -\frac{\beta_0}{2\pi} \alpha_s^2$$

が得られ，これは次の解を持つ．

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \tag{15.102}$$

Λ は実験的に決定すべき“スケール・パラメーター”であり，μ の減少に対して α_s が顕著に増加を始める尺度 $\mu \approx \Lambda$ を決める．また，式(15.99) は，

$$\mu \frac{\partial \alpha_s^{-1}}{\partial \mu} = \frac{\beta_0}{2\pi}$$

も含意しており，ここから，

$$\alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_s(\mu_0)}{1 + (\beta_0/4\pi)\alpha_s(\mu_0)\ln(\mu^2/\mu_0^2)} \tag{15.103}$$

とも書ける．$\alpha_s(\mu_0)$ は任意に選んだ参照尺度 μ_0 における値であり，この場合には，これが実験によって決定すべきパラメーターである．今では後者のアプローチの方がよく用いられており，参照尺度として Z^0 ボゾンの質量 $\mu = m_Z = 91.29\,\mathrm{GeV}$ を選ぶことが慣例となっている．さらなる正確さのためには，より高次の繰り込まれた結合 g_r による式(15.99) の項からの式(15.103) への補正も含める必要がある．現在，これを行って実験から得られている最も信頼し得る値は，

$$\alpha_s(m_Z) = 0.118 \pm 0.002 \tag{15.104}$$

である．予言される μ 依存性を図15.18に示す．この値については次節で論じる．

15.5 応用

15.3.1項と15.3.2項では，QED において高エネルギーで運動量の移行が大きい場合の相互作用の強さが，大きな質量尺度における走行結合定数によって特徴づけられることを見た．この結果は，式(15.44) から繰り込み群方程式を導き，それを解くことによって得られた．QCD において，この式に対応する元の結節部分（ヴァーテックス）と繰り込まれた結節部分（ヴァーテックス）の関係は，

$$\Gamma_r^{fb}(p_i, m_r, g_r, \mu) \equiv Z_2^{f/2} Z_3^{b/2}\, \Gamma^{fb}(p_i, m_0, g_0) \tag{15.105}$$

と表される．f と b は電子と光子ではなく，クォークとグルーオンの外線の本数を表す．式(15.105) は，式(15.44) と同じ形をしており，式(15.44) から式(15.61) を導いた議論を，電荷を強い結合定数に置き換えるという簡単な変更を施すだけで，そのまま適用できる．この場合，前節で示したように QCD では質量尺度を大きくすると走行結合が弱まるので，高いエネルギー-運動量遷移すなわち短距離の相互作用において，漸近的自由性の概念が成立することになり，摂動論を適用できる．

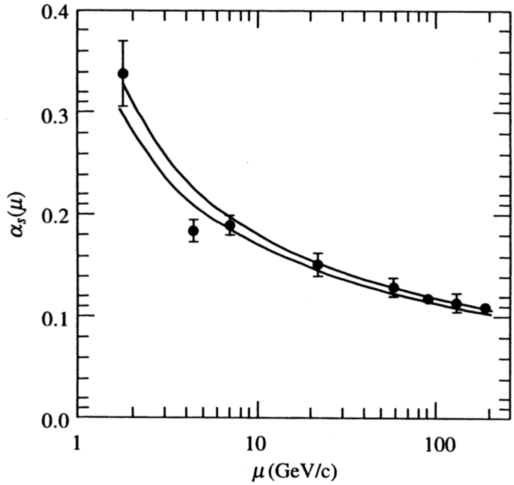


図15.18　走行結合定数 α_s の μ 依存性．以下の実験からデータを得ている．τ 崩壊，γ 崩壊，深非弾性レプトン散乱，e^+e^- 消滅 (22 GeV と 50 GeV)，Z^0 崩壊，e^+e^- 消滅 (135 GeV と 189 GeV)，実線は QCD によって予言される α_s の μ 依存性であり，$\alpha_s(m_Z)$ の値として式 (15.104) の値を採用したものである．Institute of Physics, W. M. Yao et al, Journal of Physics, Vol.33, 2006, Section 9, p.112-116 に基づき，許可を得て再構成してある．

このことを，ひとつの例において見てみる．電子-陽電子消滅によって強粒子(ハドロン)が生成する反応 (15.1) の全断面積を，ミュー粒子対(つい)生成の全断面積との比，

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{強粒子群})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+ + \mu^-)} \tag{15.106}$$

の形で考えてみよう．15.1.1 項で論じたように，重心系エネルギーが 15-40 GeV の範囲における主要な寄与は，図 15.2 (p.393) の 2 段階の機構によるものであり，その頻度は最初の電磁的過程 (15.2) によって決まる．これは図 15.19(a) の Feynman ダイヤグラムに対応する．エネルギーが高くてクォークの質量を無視してよいという近似の下では，断面積の式 (15.5) が導かれる．これを $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 断面積 (8.46) と比較すると，

$$R = R_0 \equiv 3\sum_f e_f^2 = \frac{11}{3} \tag{15.107}$$

を意味することになる．式 (15.107) における因子 3 は，それぞれのクォークの香りに対して更に 3 種類の色状態があることに起因している．和は，ここで想定する重心系

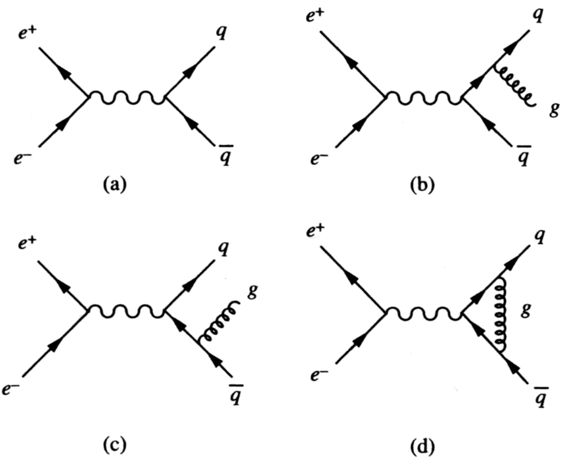


図15.19　$e^+e^- \to$ 強粒子群 の反応への α_s の2次までの寄与．終状態の粒子は強粒子噴射 (ハドロン・ジェット) の形で観測される．

エネルギーの範囲内で，エネルギー保存から許容される5種類の香り $f = d, u, s, c, b$ について取る．

式(15.107) は部分子(パートン)模型による結果で，断面積比に対する最大の単独寄与を表す．しかしながら他の寄与としても，α_s の1次のオーダーで図15.19(b)(c)(d) からの寄与がある．ここで図15.19 の (b) と (c) は "グルーオン制動放射" の過程(15.6) に対応し，15.1.2項で論じた3-ジェット事象を生じる．一方，図15.19 の (a) と (d) の間の干渉は，クォーク対(つい)生成(15.2) への α_s のオーダーの補正を生じる．全断面積へのこれらの寄与を計算するとき赤外発散が生じるが，これは異なる寄与によって QED と同じように相殺される (8.9節, 9.7節参照)．ここでは計算の詳細を省き[12]，結果だけを引用する．この補正を含めた場合，式(15.107) は次式に置き換わる．

$$R = R_0\left[1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\right] \tag{15.108}$$

ここにおいて，次のことを指摘しておく．この最初の次数の結果は，数値としては繰り込み尺度の選択に大きく依存する．なぜなら (式(15.103)参照)，

$$\alpha_s(\mu) = \alpha_s(\mu_0) + O\left[\alpha_s^2(\mu_0)\right]$$

[12] この計算は R. D. Field, *Applications of Perturbative QCD*, Addison-Wesley (1989), Section 2.1-2.7 に具体的に与えられている．

であり，$\alpha_s(\mu)$ は図15.18 (p.423) に示したように，尺度に顕著に依存するからである．式(15.108) と同じ結果は，異なる繰り込みの体系においても，α_s の値が α_s^2 のオーダーでしか違わないので成立する．最初の次数におけるこの曖昧さは[13)]，高次になると抑制される．正確な計算をすれば，物理的な量は同じ結果となるからである．付言すると，通常は繰り込み尺度 μ を，関心のある過程において特徴的な運動量尺度と同じオーダーに選ぶ．その理由をこれから示す．

高次補正の計算は長く煩雑なものになるので，結果だけを引用しておく．計算を行うために，繰り込みの体系（スキーム）を特定し，繰り込み尺度 μ を選ぶことが重要である．ここでは $\overline{\mathrm{MS}}$ 体系（スキーム）を用い，$\mu = Q$ とする．Q は電子-陽電子対（つい）の不変質量であるが，等価的に重心系における全エネルギーにあたる．断面積比(15.106) を $\overline{\mathrm{MS}}$ 体系（スキーム）において3次まで計算すると，

$$R = R_0\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + 1.41\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 - 12.8\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 + \ldots\right) \tag{15.109a}$$

と与えられる．ここで，

$$\alpha_s = \alpha_s\left(\mu^2 = Q^2\right) \tag{15.109b}$$

である．式(15.109) と，図15.18 に示されている α_s の数値から，この級数は Q^2 が充分に大きい場合には速く収束することが分かる．その上，ゼロ次の予言(15.107) に対する補正の大きさと Q^2 依存性は実験結果とよく合っており，式(15.104) と整合する α_s の値を 20%程度以内の精度で抽出することができる．

続きの作業を進める前に，繰り込みの体系（スキーム）と，展開式(15.109) の尺度依存について簡単に考察しておく．

第1に，最初の次数以降でも，尺度を与えたときの式(15.109a) の数値係数と結合定数 α_s の値が，採用する繰り込みの体系に依存することを繰り返しておく．たとえば MS 体系（スキーム）では[14)]，α_s^3 の係数 (この場合は α_s^2 ではない) は式(15.109a) に与えてある係数とは異なる．ここでは $\overline{\mathrm{MS}}$ 体系（スキーム）しか考えないことにする．

第2に，さらに興味深い点として，式(15.109) において我々は“結合定数を走行させる”ことを選択した．すなわち繰り込み尺度を $\mu = \mu_0$ のように固定した尺度とせず，$\mu = Q$ という観測する過程の運動量尺度を反映して変化する尺度にした．式(15.103) により，

$$\alpha_s(Q) = \alpha_s(\mu_0) - \frac{\beta_0}{2\pi}\ln\left(\frac{Q}{\mu_0}\right)\alpha_s(\mu_0)^2 + O\left(\alpha_s(\mu_0)^3\right)$$

[13)] このような曖昧さは QED における最低次の計算にもあるが，異なる繰り込みの体系や異なる繰り込み尺度での結合の違いが数値的にはるかに少ないので，深刻な問題にはならない．

[14)] p.399 の脚註4を参照．

であり，式(15.109a)は，$\alpha_s(\mu_0)$ の２次までの展開で，

$$R = R_0\left\{1 + \frac{\alpha_s(\mu_0)}{\pi} + \left[1.41 - \frac{\beta_0}{2}\ln\left(\frac{Q}{\mu_0}\right)\right]\left(\frac{\alpha_s(\mu_0)}{\pi}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\alpha_s(\mu_0)}{\pi}\right)^3\right)\right\}$$

を意味する．これを式(15.109)と比べると，$\alpha_s(\mu_0)^2$ の係数として対数依存項があり，これは Q が大きいと大きくなるが，式(15.109)にはこの項はない．より一般に $\alpha_s(\mu_0)$ の全次数の計算をして，ただし各次数において $\ln(Q/\mu_0)$ の最初の項だけを残すならば，結果は，

$$1 + \frac{\alpha_s(\mu_0)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{\beta_0}{2\pi}\ln\left(\frac{Q}{\mu_0}\right)\alpha_s(\mu_0)\right]^n$$

となる．これが正確に，

$$1 + \frac{\alpha_s(Q)}{\pi}$$

に等しいことは，式(15.103)の分母を展開すると分かる．言い換えると $\alpha_s(Q^2)$ の１次項は，$\alpha_s(\mu_0)$ の全次数について“最初の対数の近似”で評価した総和に等しい．$\alpha_s^2(Q_0)$ の項は，その次の対数を含み，以降も同様である．“改良した繰り込み群”の摂動展開(15.109)は，繰り込み尺度を μ_0 に固定した各次数の最初の項，次の対数項，等々の系統的な展開と等価である．

実験に関する考察に戻ると，反応における全断面積だけではなく，角度分布や，エネルギー相関や，得られる強粒子(ハドロン)噴射(ジェット)の性質なども関心の対象となる．その簡単な一例が図15.3 (p.394)のデータである．噴射(ジェット)は図15.5 (p.396)のように明確に分離するとは限らず，重なり合う場合もあるので，生成した個々の強粒子(ハドロン)を，どの噴射(ジェット)に対応させるかという問題は必ずしも自明ではない．このような場合には，噴射(ジェット)を注意深く定義して，非摂動的な強粒子(ハドロン)化過程の信頼し得るモデルを用いた事象の解析が必要となる．さらに付言すると，始状態に陽子を含むような最も高エネルギーの過程では，陽子内部のクォーク分布やグルーオン分布を知る必要も生じる．これを摂動で計算することは不可能であるが，電子やニュートリノの散乱実験によって測定することは可能である．本書ではこのような話題を扱わないが，読者には優れた参考書を薦めておきたい[15)]．ここでは単に，多様な異なる過程から求めた強い相互作用の結合定数の値が，図15.20のように良好な整合性を示し，QCDの理論が広範な成功を収めていることを紹介するに留めておく[16)]．

---

15) 14.4節のFeynman規則から始めて，QCD応用の一般的な入門を与えている書籍としては，たとえば R. D. Field, *Applications of Perturbative QCD*, Addison Wesley (1989)や，

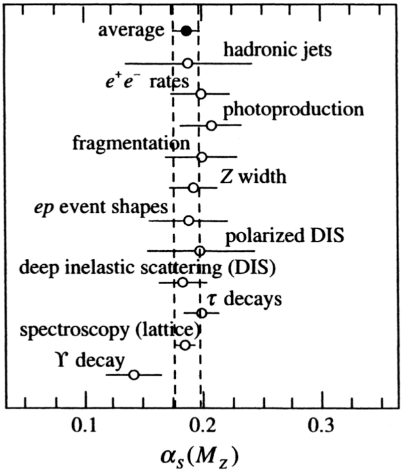


図15.20 様々な過程の解析から得られた $\alpha_s(m_Z)$ の値．Institute of Physics の許可を得て，W. M. Yao et al, Journal of Physics, Vol.33, 2006, section 9, p.112-116 の結果を再構成した．

15.6 付録：QCDにおけるループダイヤグラムの例

この付録では，図15.15 (p.417) のグルーオン自己エネルギー部分のグラフの評価方法を論じ，式(15.80a-c) を導く．また図15.17 (p.420) を評価して，式(15.90) を導く．

15.6.1 グルーオン自己エネルギー部分のグラフ

グルーオンの自己エネルギー部分は，最低次では図15.15(a)(b)(c) の3つのグラフによって与えられる．それぞれの寄与を考察する．

(a) クォークループの寄与：

14.4節の Feynman規則を図15.15(a) に適用すると，次式が得られる．

R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R. Webber, *QCD and Collider Physics*, Cambridge University Press (1996) がある．

16) 図15.18 (p.423) と図15.20 で採用されている各データに関する議論については，次の文献を参照．C. Hinchliffe, "Quantum Chromodynamics and its coupling", in "Review of Particle Physics", *J. Phys. G: Nucl. Pait. Phys.* **33** (2006) 1.

$$\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{il}^{\mu\nu}(a)=C_{il}^{(a)}(-1)(-\mathrm{i}g_0)^2\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}\big[\gamma^\mu\mathrm{i}S_\mathrm{F}(p+k)\gamma^\nu\mathrm{i}S_\mathrm{F}(p)\big] \tag{15.110}$$

色因子は，式(15.70) を用いて，

$$C_{il}^{(a)}=T_{ab}^iT_{ba}^l=\frac{1}{2}\delta_{il} \tag{15.111}$$

と与えられる．式(15.111) と，伝播関数の具体的な式を式(15.110) に代入すると，次式を得る．

$$\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{il}^{\mu\nu}(a)=-\frac{\delta_{il}}{2}\,g_0^2\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{Tr}\,[\gamma^\mu(\not p+\not k+m_0)\gamma^\nu(\not p+m_0)]}{[(p+k)^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon][p^2-m_0^2+\mathrm{i}\varepsilon]} \tag{15.112}$$

この式は，因子 δ_{il} の導入と，結合の自明な置き換え $e_0^2\to g_0^2/2$ を別として，光子の自己エネルギー部分の式(9.8) と同じ形である．光子の自己エネルギー部分は，10.5節において次元正則化を用いて評価してある．式(10.48) と式(10.52b) から，次式が得られる．

$$\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{il}^{\mu\nu}(a)=\delta_{il}\big(k^\mu k^\nu-k^2g^{\mu\nu}\big)\,\frac{\mathrm{i}\tilde{g}_0}{24\pi^2}\left[\frac{2}{\eta}-\gamma+\ln 4\pi\right]+\ldots \tag{15.80a}$$

$\tilde{g}_0$ は式(15.79) によって与えられ，$\ldots$ は繰り込み定数に寄与を持たない有限項を表す．

(b) ゴーストループ：

次に図15.15(b) (p.417) のゴーストループを評価しよう．14.4節の Feynman 規則を利用し，閉じたゴーストループに関わる因子 (-1) も忘れずに考慮して，次式を得る．

$$\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{il}^{\mu\nu}(b)=C_{il}^{(b)}(-1)g_0^2\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,(p+k)^\mu k^\nu\mathrm{i}\Delta_\mathrm{F}(p+k)\mathrm{i}\Delta_\mathrm{F}(k) \tag{15.113a}$$

色因子は，

$$C_{il}^{(b)}=f_{ijk}f_{lkj}=-f_{ijk}f_{ljk}=-3\,\delta_{il} \tag{15.113b}$$

となるが，これ以降は $i=l$ と置く．次元を $D=4-\eta$ へ一般化して，式(15.113) を次の形に書く．

$$\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{il}^{\mu\nu}(b)=-3\,\tilde{g}_0^2\,\mathrm{I}^{\mu\nu}(k)\,\delta_{il} \tag{15.114}$$

$$\mathrm{I}^{\mu\nu}(k)=\frac{\mu^\eta}{(2\pi)^D}\int\mathrm{d}^Dp\,\frac{N^{\mu\nu}(p,k)}{[(p+k)^2+\mathrm{i}\varepsilon][k^2+\mathrm{i}\varepsilon]} \tag{15.115}$$

$$N^{\mu\nu}(p+k)=(p+k)^\mu k^\nu \tag{15.116}$$

式(15.115) の積分を評価するために，Feynmanのパラメーター積分(10.10) を用いて，次のように書く．

$$\mathrm{I}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu^{\eta}}{(2\pi)^D}\int_0^1 \mathrm{d}z \int \mathrm{d}^D p \, \frac{N^{\mu\nu}(p,k)}{[p^2 + (k^2 + 2pk)z + \mathrm{i}\varepsilon]^2}$$

新たな変数，

$$q = p + kz$$

を導入すると，次式が得られる．

$$\mathrm{I}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu^{\eta}}{(2\pi)^D}\int_0^1 \mathrm{d}z \int \mathrm{d}^D q \, \frac{N^{\mu\nu}(q-kz,k)}{[q^2 + k^2 z(1-z) + \mathrm{i}\varepsilon]^2} \tag{15.117}$$

$$N^{\mu\nu}(q-kz,k) = q^{\mu}q^{\nu} - k^{\mu}k^{\nu}z(1-z) + \dots$$

... は q の 1 次の項を省いたことを意味する．これらの項は式(10.32) によって消える．式(15.117) は，次のように表される．

$$\mathrm{I}^{\mu\nu}(k) = \frac{\mu^{\eta}}{(2\pi)^D}\int_0^1 \mathrm{d}z \Big(I_1^{\mu\nu}(k,z) + I_2^{\mu\nu}(k,z) \Big) \tag{15.118}$$

被積分関数の部分は，式(10.23) と式(10.33) を用いて，次のように与えられる．

$$\begin{aligned} I_1^{\mu\nu}(k,z) &\equiv \int \mathrm{d}^D q \, \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{[q^2 + k^2 z(1-z) + \mathrm{i}\varepsilon]^2} \\ &= -\mathrm{i}\, \frac{\pi^{D/2}\Gamma(1-D/2)}{2} \frac{g^{\mu\nu}}{[-k^2 z(1-z)]^{1-D/2}} \end{aligned} \tag{15.119a}$$

$$\begin{aligned} I_2^{\mu\nu}(k,z) &\equiv -k^{\mu}k^{\nu}z(1-z)\int \frac{\mathrm{d}^D q}{[q^2 + k^2 z(1-z) + \mathrm{i}\varepsilon]^2} \\ &= -z(1-z)\mathrm{i}\pi^{D/2}\Gamma(2-D/2)\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{[-k^2 z(1-z)]^{2-D/2}} \end{aligned} \tag{15.119b}$$

残る作業は，式(15.119a,b) を式(15.117) に代入して，式(10.28) と式(10.29) を用いて $\eta \to 0$ の極限を取ることである．このようにして得た結果を式(15.114) に代入すると，最終的に次式を得る．

$$\mathrm{i}g_0^2\,\Pi_{il}^{\mu\nu}(b) = \delta_{il}\left(k^{\mu}k^{\nu} + \frac{k^2 g^{\mu\nu}}{2}\right)\frac{\mathrm{i}\tilde{g}_0^2}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \dots \tag{15.80b}$$

... は有限の寄与を表し，無視することができる．

(c) グルーオンループ：

最後の寄与は，図15.15(c) (p.417) のグルーオンループから生じる．式(14.68) と図14.4(b) (p.379) を用いて，２つの３点結節(ヴァーテックス)部分因子が次のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
&g_0 f_{ijk} V_{\mu\rho\sigma}(-k, -p-k, p) \\
&\quad = g_0 f_{ijk}\left[g_{\rho\sigma}(k+2p)_\mu + g_{\mu\rho}(-2k-p)_\sigma + g_{\mu\sigma}(k-p)_\rho\right] \qquad (15.120\text{a})\\
&g_0 f_{lkj} V_{\nu\sigma\rho}(-k, -p, p+k) \\
&\quad = g_0 f_{lkj}\left[g_{\rho\sigma}(k+2p)_\nu + g_{\sigma\nu}(k-p)_\rho + g_{\nu\rho}(-2k-p)_\sigma\right] \qquad (15.120\text{b})
\end{aligned}
$$

グルーオンループに対称性因子 1/2 が付くこと (p.385, 図14.9) も思い出すと，グルーオンの自己エネルギー部分への図15.15(c) の寄与は次式で与えられる．

$$
\mathrm{i}g_0^2\,\Pi^{\mu\nu}_{il}(c) = \delta_{il}\frac{3}{2}\frac{g_0^2}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4p\,\frac{N^{\mu\nu}(p,k)}{[(p+k)^2+\mathrm{i}\varepsilon][k^2+\mathrm{i}\varepsilon]} \qquad (15.121\text{a})
$$

色因子は式(15.66) と式(15.67) によって評価した．また，

$$
N^{\mu\nu}(p,k) = V^{\mu}_{\rho\sigma}(k, -k-p, p)\,V^{\nu\sigma\rho}(-k, -p, p+k) \qquad (15.121\text{b})
$$

である．

次元を $D = 4-\eta$ へ拡張し，式(15.120) を式(15.121b) に代入して $g^\rho_\rho = \delta^\rho_\rho = D$ を利用すると，次の結果が得られる．

$$
\mathrm{i}g_0^2\,\Pi^{\mu\nu}_{il}(c) = \frac{3\tilde{g}_0^2}{2}\delta_{il}\frac{\mu^\eta}{(2\pi)^D}\int \mathrm{d}^Dp\,\frac{N^{\mu\nu}(p,k)}{[(p+k)^2+\mathrm{i}\varepsilon][k^2+\mathrm{i}\varepsilon]} \qquad (15.122\text{a})
$$

$$
\begin{aligned}
N^{\mu\nu}(p,k) = {}& g^{\mu\nu}\left[(2k+p)^2 + (p-k)^2\right] + p^\mu p^\nu(4D-6) \\
& + k^\mu k^\nu(D-6) + (p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu)(2D-3) \qquad (15.122\text{b})
\end{aligned}
$$

式(15.122a) は，式(15.115) と同じ形をしており，式(15.122b) の方が式(15.116) よりも多くの項を含んでいるけれども，同様の方法で評価できる．グルーオン自己エネルギー部分へのグルーオンループの寄与の式として，最終的に次式が得られる．

$$
\mathrm{i}g_0^2\,\Pi^{\mu\nu}_{il}(c) = \delta_{il}\left(11k^\mu k^\nu - \frac{19}{2}k^2 g^{\mu\nu}\right)\left(\frac{-\mathrm{i}\tilde{g}_0^2}{32\pi^2}\right)\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots \qquad (15.80\text{c})
$$

... はここでも特異性のない不要な項を表す．

15.6.2 クォーク-グルーオン結節点補正

最低次のクォーク-グルーオン結節点(ヴァーテックス)補正は，図15.17(a)(b) (p.420) の2つのグラフによって与えられる．それぞれについて考えよう．

第1のグラフである図15.17(a)は，QEDにおける結節点(ヴァーテックス)補正の図9.2(d) (p.188) と大変よく似たものである．14.4節の Feynman 規則を適用すると，このグラフからの寄与は，

$$\mathrm{i}g_0^3\Lambda^{i,\mu}_{(a)}(p',p) = \mathrm{i}g_0^3 C_{(a)}\Lambda^\mu(p',p) \tag{15.123}$$

である．$\Lambda^\mu(p',p)$ は式(9.48) で与えられる．色因子は式(15.73) により，

$$C_{(a)} = T^j_{cb}T^i_{ba}T^j_{ad} = -\frac{1}{6}T^i_{cd} \tag{15.124}$$

となる．$\Lambda^\mu(p',p)$ の積分は，10.5節において次元正則化によって評価した．式(10.63)と式(10.65) を組み合わせると，発散する寄与は，

$$\Lambda^\mu(p',p) = \mu^{-\eta}\frac{\gamma^\mu}{16\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots$$

と与えられる．したがって式(15.123)と式(15.124)により，次式を得る．

$$g_0^2\Lambda^{i,\mu}_{(a)}(p',p) = -\tilde{g}_0^2\frac{\gamma^\mu T^i}{96\pi^2}\left[\frac{2}{\eta} - \gamma + \ln 4\pi\right] + \ldots \tag{15.90a}$$

ここではクォーク添字の表記を省いた．... は不要な有限項を表す．

次に図15.15(b) のグラフによる寄与を計算しよう．14.4節の Feynman 規則により，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathrm{i}g_0^3\Lambda^{i,\mu}_{(b)}(p',p) = &\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}g_0 f_{inm}V^{\mu\tau\nu}(p'-p, k-p', p-k)\\ &\times\frac{-\mathrm{i}}{(p-k)^2+\mathrm{i}\varepsilon}\frac{-\mathrm{i}}{(p'-k)^2+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}g_0)T^n_{ca}\gamma_\tau\frac{\mathrm{i}(\not k+m_0)}{k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}g_0)T^m_{ad}\gamma_\nu\end{aligned} \tag{15.125}$$

$$V^{\mu\tau\nu}(p'-p, k-p', p-k) = g^{\tau\nu}(p+p'-2k)^\mu + g^{\mu\tau}(k+p)^\nu + g^{\mu\nu}(p'-2p+k)^\tau \tag{15.126}$$

ここでは Feynman グラフの各部に対応する因子を具体的に示した．種々の因子を扱い易いようにまとめると，式(15.125) を次の形に書き直せる．

$$\mathrm{i}g_0^3\Lambda^{i,\mu}_{(b)}(p',p) = \mathrm{i}g_0^3 C_{(b)}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{N^\mu(p',p,k)}{[(p-k)^2+\mathrm{i}\varepsilon][(p'-k)^2+\mathrm{i}\varepsilon][k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]} \tag{15.127}$$

$$N^\mu(p',p,k) = V^{\mu\tau\nu}(p-p', k-p', p-k)\gamma_\tau(\not k+m)\gamma_\nu \tag{15.128}$$

色因子は，式(15.66)と式(15.72)により，次のようになる．

$$C_{(b)} = -f_{inm}T^n_{ca}T^m_{ad} = -\frac{3}{2}\mathrm{i}T^i_{cd} \tag{15.129}$$

式(15.127)は，次元正則化の標準的な技法によって評価される．次元を $4-\eta$ へ一般化し，式(15.129)を用いると，次の形に書ける．

$$\mathrm{i}g_0^3\Lambda^{i,\mu}_{(b)}(p',p) = \frac{3}{2}g_0^3T^i_{cd}I^\mu \tag{15.130a}$$

$$g_0^2 I^\mu = \tilde{g}_0^2\mu^\eta\int\frac{\mathrm{d}^Dk}{(2\pi)^D}\frac{N^\mu(p',p,k)}{[(p'-k)^2-\lambda^2+\mathrm{i}\varepsilon][(p-k)^2-\lambda^2+\mathrm{i}\varepsilon][k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]} \tag{15.130b}$$

ここでは内部グルーオンの4元運動量がゼロになるときに生じる発散を防ぐために“赤外切断”λ を導入してある．式(15.130)は，式(10.55)と $N^{\mu\nu}(p',p,k)$ の部分を除いて同じ形をしており，その発散部分を式(10.55)から式(10.65)の導出と同様の手続きによって評価できる．これを行うと図15.17(b)の発散部分の寄与として，

$$g_0^2\Lambda^{i,\mu}_{(b)}(p',p) = \gamma^\mu T^i_{cd}\frac{9\tilde{g}_0^2}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\eta}-\gamma+\ln 4\pi\right]+\dots \tag{15.90b}$$

が得られる．これが15.4.3項において，クォークの色添字 c, d を省いて引用した式にあたる．

練習問題

15.1 質量殻上(オン・シェル)電荷 e と走行電荷 $e_r(\mu)$ の関係を2次まで求めよ．$e_r(\mu)=e$ となる μ の値は？

15.2 式(15.121)から出発して，グルーオン自己エネルギー部分へのグルーオンループの寄与(15.80c)を導け．

15.3 式(15.130)から出発して，図15.17(b) (p.420)から生じる結節点補正(15.90b)を導け．

第 16 章　弱い相互作用

本書の残りの部分は弱い相互作用の理論に充てられている．内容的には第11章から直接に続いており，第12-15章の知識は，これ以降の部分において必要ではない．

16.1　緒論

クォーク間やレプトン間に働く弱い相互作用も，強い相互作用や電磁相互作用と同じように，力を媒介するスピン1のボゾンの交換に関係づけられる．しかしながら光子やグルーオンとは異なり，弱い相互作用を媒介するベクトルボゾンは大きな質量を持つ．このような“仲介ベクトルボゾン”(intermediate vector boson : IVB) として，電荷を持つボゾン W^+, W^- と中性ボゾン Z^0 の3種類が存在するが，これらの質量の値は，次のようになっている．

$$M_W = 80.40\,\mathrm{GeV}, \qquad M_Z = 91.19\,\mathrm{GeV} \tag{16.1}$$

この非常に大きな質量が，以下に示す2つの性質を導くことは明らかである．

第1に，一般的な議論から，任意の力の到達距離は，それを媒介する粒子の Compton 波長によって決まることが示される[1)]．したがってクォークやレプトンからの弱い相互作用の到達距離は 10^{-3} f のオーダーに過ぎず，低エネルギーにおける弱い相互作用は，到達距離がゼロの点接触型相互作用のように近似できる．これを 16.6.1項で論じる予定である．

第2に，実験において $W^{\pm}$ ボゾンや Z^0 ボゾンを生成するためには，非常に高いエネルギーが必要である．このため，これらのボゾンの存在と質量が理論的に予言されてから，実際の発見 (1983年) に至るまで長い期間を要した[2)]．

弱い相互作用が質量を持つ荷電ボゾンの交換によって生じているという概念を最初

---

1) たとえば B. R. Martin and G. Shaw, *Particle Physics*, 3rd edn, John Wiley & Sons Ltd, 2008, Section 1.4 を参照.

2) 中性カレントと $W^{\pm}$ ボゾン，Z^0 ボゾンの発見については，たとえば上に挙げた Martin and Shaw の，特に Section 8.1，Section 4.5.1 を参照.

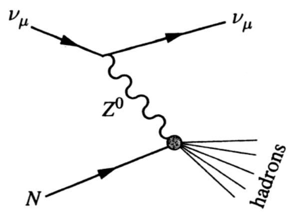


図16.1　$\nu_\mu + N \to \nu_\mu + X$ というタイプの中性カレント反応の機構．X は保存則によって許容される強粒子群を表す．

に提案したのはおそらく Klein で，これは1938年のことであった[3]．そして1973年まで，弱い相互作用の観測事実はすべて，それが重い荷電ボゾン $W^\pm$ だけによって媒介されるという仮説と整合していた．しかし1960年代に Glashow（グラショウ）, Salam（サラム）, Weinberg は，電磁相互作用と弱い相互作用を統一する理論を進展させた．この仕事は19世紀に Faraday と Maxwell が電気学と磁気学を統一した仕事にしばしば比せられる．新しい統一理論には注目すべき予言がいくつか含まれていたが，たとえば中性ベクトルボゾン Z^0 の存在と，その交換に起因する弱い相互作用も予言された．このような反応は，荷電ボゾン $W^\pm$ の交換によるいわゆる“荷電カレント反応”と区別するために“中性カレント反応”と呼ばれた．具体的には図16.1の機構による，

$$\nu_\mu + N \;\to\; \nu_\mu + X$$

のような中性カレント反応が予想される．N は核子，X は保存則によって許容される強粒子群（ハドロン）を表す．この反応は1973年に CERN において実際に観測された．

中性カレントの存在とその性質が，実験的な発見以前に予言されたことは，電弱統一理論の輝かしい多くの成功の中のひとつに過ぎない．他にもチャーム・クォークの存在は，それが1974年に発見される前に予言されていたし，$W^\pm$ ボゾンと Z^0 ボゾンの質量も，1983年に実際にこれらのボゾンが検出されるはるか以前に予言されていた．この理論は弱い相互作用と電磁相互作用のあらゆるデータに完全に整合しており，今では両者の相互作用をまとめて“電弱相互作用”(electroweak interaction) と呼ぶことも多い．しかしながら両者の統一的な挙動が明確に現れるのは非常に高いエネルギー領域に限られ，低エネルギーにおいては弱い相互作用と電磁相互作用が明確に分離している．このことも後から見る予定である．

---

[3] O. Klein, Proceedings of the Symposium on Les Nouvelles Theories de la Physique, Warsaw, 1938; Nature, **161** (1948) 897.

本章では $W^{\pm}$ の交換だけを考慮する仲介ベクトルボゾン (IVB) 理論の展開と応用を扱う．この理論は現代的な理論の礎石となったものであり，弱い相互作用による多くの過程をよく記述できる．しかしながら，この理論が深刻な困難に直面することも見る予定である．そのような困難は，第17-19章において統一理論の定式化によって解決されることになる．

議論を進める前に，弱い相互作用による過程が，レプトンと強粒子(ハドロン)の含まれ方から3通りに分類されることを述べておく．

(i) 純粋なレプトン的過程 (leptonic process)：たとえば，

$$\mu^- \ \rightarrow \ e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \tag{16.2}$$

のような過程である．荷電レプトン $e^{\mp}$, $\mu^{\mp}$, $\tau^{\mp}$ と，これらに関わるニュートリノ ν_e, ν_μ, ν_τ および反ニュートリノ $\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$ だけが含まれる．

(ii) 半レプトン的過程 (semileptonic process)：強粒子(ハドロン)とレプトンを両方とも含む過程で，中性子の β 崩壊がこの例にあたる．

$$n \ \rightarrow \ p + e^- + \bar{\nu}_e \tag{16.3}$$

(iii) 純粋な強粒子的過程 (hadronic process)：Λ 粒子の崩壊が，この例にあたる．

$$\Lambda \ \rightarrow \ p + \pi^- \tag{16.4}$$

残念ながら強粒子(ハドロン)の構造に関する我々の理解は限られたものである．クォーク同士を束縛する強い相互作用は1f程度の距離で作用し，ここでは摂動論を適用できないからである．これに対して電磁相互作用と弱い相互作用には摂動論が適用可能と考えられる．本書では後者を扱う．純粋なレプトン的過程は，単純な場による曖昧さのない考察が可能となるので，ここでは純粋なレプトン的過程に話を絞る．これは強粒子(ハドロン)を含まない QED 過程に対する扱い方と似ている[4]．

16.2 レプトンの弱い相互作用

電子-陽電子場は，双一次の電磁カレントの形で QED 相互作用に入っている．

$$\mathcal{H}_{\mathrm{QED}}(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^{\alpha}\psi(x)A_{\alpha}(x) \tag{16.5}$$

[4] 弱い相互作用全般の優れた解説として D. Bailin, *Weak Interactions*, 2nd edn, Adam Hilger, Bristol 1982 がある．

レプトン的過程を支配する弱い相互作用のハミルトニアン密度も，これと同じようにレプトン場演算子の双一次の形で構築される．実験的に見られる広範囲のレプトン的過程や半レプトン的過程は，レプトン場が相互作用に次のような組合せで入るという仮定に整合している．

$$J_\alpha(x) = \sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}(x) \tag{16.6a}$$

$$J_\alpha^\dagger(x) = \sum_l \bar{\psi}_{\nu_l}(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\psi_l(x) \tag{16.6b}$$

式(16.6) において l は荷電レプトンの種類 (世代) を指定する添字 $l = e, \mu, \tau$ であり，ν_l はそれに対応するニュートリノ場を表す．ψ_l と ψ_{ν_l} は，これらに対応する量子場である．ψ_l は l^- レプトンの消滅演算子について 1 次であり，l^+ レプトンの生成演算子についても 1 次である．式(16.5) の電磁カレントからの類推で $J_\alpha(x)$ と $J_\alpha^\dagger(x)$ をレプトンカレント (レプトン荷電カレント) と呼ぶ．これらは Lorentz変換の下でベクトルのように変換され，この後に見るようにレプトン数保存を含意する．

もちろんカレント(16.6) から一意的にレプトンの相互作用を構築する方法があるわけではない．光子によって媒介される電磁相互作用の記述からの類推で，弱い相互作用も何らかの量子の媒介によるものとして記述することを考える．この媒介量子を W ボゾンと呼ぶ．QED 相互作用(16.5) を参考にして，IVB 理論のレプトン相互作用を次のように置いてみる．

$$\mathcal{H}_\mathrm{I}(x) = g_W J^{\alpha\dagger}(x) W_\alpha(x) + g_W J^\alpha(x) W_\alpha^\dagger(x) \tag{16.7}$$

g_W は無次元の結合定数で，場 $W_\alpha(x)$ は W ボゾンを記述する．この相互作用によって，ミュー粒子崩壊(16.2) やニュートリノ散乱過程，

$$\nu_e + e^- \ \rightarrow\ \nu_e + e^-$$

が記述される．最低次の摂動の Feynman グラフは図16.2 と図16.3 のように表される．どちらの場合も 2 つのレプトンカレント間の相互作用が，ひとつの W ボゾンの交換によって生じている．これはひとつの光子の交換による電子-電子散乱 (p.135, 図7.14) と類似の過程にあたる．

相互作用(16.7) について，もう少し詳しく調べてみよう．まず最初に，この相互作用は，場 $W_\alpha(x)$ をレプトンのベクトルカレントに結合させていることに注意を促しておく．したがって，この場もベクトル場でなければならず，W ボゾンは必然的にスピン 1 のベクトルボゾンである[5]．レプトンカレント(16.6) の各項 (すなわち Feynman

[5] 16.3節において $W_\alpha(x)$ は Lorentz条件 $\partial^\alpha W_\alpha(x) = 0$ を満たすことを見る予定である．したがって，場 $W_\alpha(x)$ は独立な偏極状態を 3 つだけ持ち，スピン 1 の粒子を記述する．

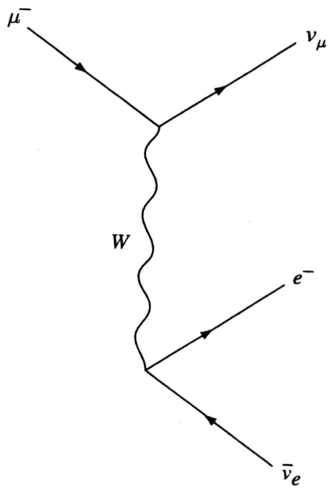


図16.2 IVB理論によるミュー粒子崩壊 $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ への最低次の寄与.

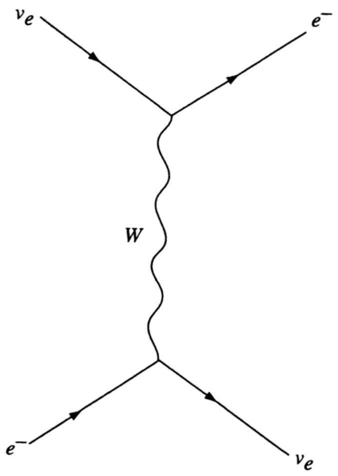


図16.3 IVB理論による散乱過程 $\nu_e + e^- \to \nu_e + e^-$ への最低次の寄与.

グラフの各結節点[ヴァーテックス])は，荷電レプトンと中性レプトンをひとつずつ含んでいるので，W ボゾンは電荷を持ち，$W(x)$ 場は非エルミートである.

7.4節で，我々は，

$$N(e) = N(e^-) - N(e^+) \tag{16.8}$$

などのレプトン数を導入し，これが電磁過程において保存することを見た．相互作用(16.7)がこれらのレプトン数を保存せず，実際に(16.2)-(16.4)の反応において上記のようなレプトン数が保存されていないことは明らかである．しかしここでレプトン数の定義を次のように修正してみる．

$$\begin{aligned} N(e) &= N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_e) - N(\bar{\nu}_e) \\ N(\mu) &= N(\mu^-) - N(\mu^+) + N(\nu_\mu) - N(\bar{\nu}_\mu) \\ N(\tau) &= N(\tau^-) - N(\tau^+) + N(\nu_\tau) - N(\bar{\nu}_\tau) \end{aligned} \tag{16.9}$$

そうすると，カレント $J_\alpha(x)$ と $J^\dagger_\alpha(x)$ (式(16.6)) はレプトン数を保存することになる．たとえば式(16.6a) における，

$$\bar{\psi}_e(x)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\psi_{\nu_e}(x)$$

は，電子生成演算子と陽電子消滅演算子について１次であり，ν_e 消滅演算子と $\bar{\nu}_e$ 生成演算子について１次である．これらのレプトンカレントによって構築される任意の相互作用は，相互作用(16.7)と同様にレプトン数を保存する．このことは実験とも整合しており，如何なる粒子と相互作用が含まれる過程においても，式(16.9)の各レプトン数は保存することが見出されている．たとえば原子核にミュー・ニュートリノを衝突させる場合，

$$\nu_\mu + (Z, A) \ \rightarrow\ (Z+1, A) + \mu^- \tag{16.10}$$

という反応はレプトン数保存の観点から許容されるが，

$$\nu_\mu + (Z, A) \ \rightarrow\ (Z-1, A) + \mu^+ \tag{16.11}$$

は禁じられる．式(16.11)のように禁じられている過程は，そのような過程を検出しやすいように計画された実験においても観測されることがない．

相互作用(16.7)は“Ｖ－Ａ相互作用”として知られている．その理由は，これを構築するカレント $J^\alpha(x)$ が，

$$J^\alpha(x) = J^\alpha_{\mathrm{V}}(x) - J^\alpha_{\mathrm{A}}(x) \tag{16.12a}$$

という差の形で表され，第１項はベクトルカレント，

$$J^\alpha_{\mathrm{V}}(x) = \sum_l \bar{\psi}_l(x)\gamma^\alpha\psi_{\nu_l}(x) \tag{16.12b}$$

第2項は軸性ベクトルカレント (axial vector current),

$$J_{\mathrm{A}}^{\alpha}(x) = \sum_{l} \bar{\psi}_l(x)\gamma^{\alpha}\gamma_5\psi_{\nu_l}(x) \tag{16.12c}$$

の形で与えられるからである.

パリティ変換 $(\mathbf{x}, t) \to (-\mathbf{x}, t)$ の下で $J_{\mathrm{V}}^{\alpha}(x)$ は符号を変えるが, $J_{\mathrm{A}}^{\alpha}(x)$ は符号を変えない[6]. したがって相互作用(16.7)が空間反転の下で不変でないことは明らかであり, パリティは保存されない. (この性質は純粋なレプトン的過程に限られるものではなく, すべての弱い相互作用に共通する.) このことはニュートリノに対して注目すべき結果をもたらす. まず, ニュートリノの質量がゼロであると仮定しよう. この場合, 付録Aの式(A.43)により $(1-\gamma_5)/2$ がヘリシティ射影演算子となる. $\psi_{\nu_l}(x)$ はニュートリノ消滅演算子と反ニュートリノ生成演算子に関して1次なので, 式(A.40)により, 相互作用(16.6)-(16.7)に現れている演算子,

$$\psi_{\nu_l}^{\mathrm{L}}(x) \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}(x) \tag{16.13}$$

は, ヘリシティが負のニュートリノだけを消滅させ, ヘリシティが正の反ニュートリノだけを生成する. よって弱い相互作用には, これらの状態だけが役割を担っており, ヘリシティが正のニュートリノとヘリシティが負の反ニュートリノが弱い相互作用に関わることはない.

次の演算子,

$$\left.\begin{matrix} P_{\mathrm{L}} \\ P_{\mathrm{R}} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5) \tag{16.14}$$

はもちろん, フェルミオン場の質量 m にはよらず, 常に射影演算子である ($P_{\mathrm{L}}^2 = P_{\mathrm{L}}$, $P_{\mathrm{R}} = 1 - P_{\mathrm{L}}$). しかしゼロでない質量 m を持つ粒子において P_{L} や P_{R} によって射影される状態をヘリシティ固有状態と見なし得るのは, 高エネルギー極限, すなわち粒子のエネルギーが粒子質量 m に対して非常に高い場合に限られる. ニュートリノに関しては, 質量がゼロに極めて近いので, ここで扱う問題では, この近似が常に成立すると見なしてよい. 荷電レプトンを扱う場合にも, 高エネルギーの状況を考えるならば, やはりこれが近似として成立する. 式(16.13)からの類推で, "左手型の" 荷電レプトン場を定義する.

$$\psi_l^{\mathrm{L}}(x) \equiv P_{\mathrm{L}}\psi_l(x) = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi_l(x) \tag{16.15}$$

レプトンカレント(16.6a)を, 次のように書けることを示すのは容易である.

---
[6] 付録Aの式(A.53)および問題A.1を参照.

$$J_\alpha(x) = 2\sum_l \bar{\psi}_l^{\mathrm{L}}(x)\gamma_\alpha\psi_{\nu_l}^{\mathrm{L}}(x) \tag{16.16}$$

つまりニュートリノに対して，荷電レプトンの左手型の場だけが関わる．したがって相対論的なエネルギー領域において，弱い相互作用によって生成した電子 (陽電子) は，負 (正) のヘリシティを持つ．たとえばこれは，次のようなミュー粒子崩壊過程によって生じる電子と陽電子の大部分にあてはまる．

$$\mu^- \ \rightarrow \ e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \qquad \mu^+ \ \rightarrow \ e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \tag{16.17}$$

16.3 自由なベクトルボゾン場

質量 m_W，スピン 1 の粒子を記述するベクトル場 $W^\alpha(x)$ を表す最も単純な式は，次の Proca 方程式である．

$$\Box W^\alpha(x) - \partial^\alpha\left(\partial_\beta W^\beta(x)\right) + m_W^2 W^\alpha(x) = 0 \tag{16.18}$$

この式の 4 元発散を取ると，$m_W \neq 0$ であれば自動的に Lorentz 条件，

$$\partial_\alpha W^\alpha(x) = 0 \tag{16.19}$$

が得られる．これは光子の場合に付帯条件として Lorentz 条件を課さなければならなかった状況とは対照的である．式(16.19) により，Proca 方程式(16.18) は次式に簡約される．

$$\Box W^\alpha(x) + m_W^2 W^\alpha(x) = 0 \tag{16.20}$$

式(16.18) を導く自由場のラグランジアン密度は，次のように与えられる．

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}F_{W\alpha\beta}^\dagger(x)F_W^{\alpha\beta}(x) + m_W^2 W_\alpha^\dagger(x)W^\alpha(x) \tag{16.21a}$$

$$F_W^{\alpha\beta}(x) \equiv \partial^\beta W^\alpha(x) - \partial^\alpha W^\beta(x) \tag{16.21b}$$

W ボゾンは荷電粒子場なので，$W^\alpha(x)$ と $F_W^{\alpha\beta}(x)$ を非エルミート場と見なす．

粒子的な記述との関連を確立するために，W 場を常套的に平面波の完全系によって展開する．

$$W^\alpha(x) = W^{\alpha+}(x) + W^{\alpha-}(x) \tag{16.22a}$$

$$W^{\alpha+}(x) = \sum_{\mathbf{k}}\sum_r \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})a_r(\mathbf{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{16.22b}$$

$$W^{\alpha-}(x) = \sum_{\mathbf{k}}\sum_r \left(\frac{1}{2V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})b_r^\dagger(\mathbf{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \tag{16.22c}$$

ここで,

$$\omega_{\mathbf{k}} = \left(m_W^2 + \mathbf{k}^2\right)^{1/2} \tag{16.23}$$

である(式(16.22)は荷電スカラー中間子に対する式(3.26a)や光子に対する式(5.16)に相当する). ベクトル $\varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})$ $(r = 1, 2, 3)$ は, 正規直交系を構成している実数の偏極ベクトルである.

$$\varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})\varepsilon_s^\alpha(\mathbf{k}) = -\delta_{rs} \tag{16.24}$$

そして Lorentz 条件(16.19)は, 偏極ベクトルに関する次の条件を意味する.

$$k_\alpha \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k}) = 0 \tag{16.25}$$

$k = (\omega_{\mathbf{k}}, 0, 0, |\mathbf{k}|)$ となる座標系において便利な偏極ベクトルの選び方として, 次のものがある.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\mathbf{k}) &= (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon_2(\mathbf{k}) &= (0, 0, 1, 0) \\ \varepsilon_3(\mathbf{k}) &= (|\mathbf{k}|, 0, 0, \omega_{\mathbf{k}})/m_W \end{aligned} \tag{16.26}$$

これらの完全性の関係式,

$$\sum_{r=1}^{3} \varepsilon_r^\alpha(\mathbf{k})\varepsilon_r^\beta(\mathbf{k}) = -g^{\alpha\beta} + k^\alpha k^\beta/m_W^2 \tag{16.27}$$

は, 式(16.26)から直接に確認できる.

読者にとって自明のはずであるが, ラグランジアン(16.21)を正準形式によって量子化すると, $a_r(\mathbf{k})$ と $b_r(\mathbf{k})$ は質量 m_W, 運動量 $\mathbf{k}$, 偏極ベクトル $\varepsilon_r(\mathbf{k})$ のベクトル中間子の消滅演算子と解釈され, $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ と $b_r^\dagger(\mathbf{k})$ はこれらに対応する生成演算子と解釈される. 相互作用(16.7)が電荷を保存するためには $a_r(\mathbf{k})$ と $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ を正電荷ボゾン (W^+) に関係づけ, $b_r(\mathbf{k})$ と $b_r^\dagger(\mathbf{k})$ を負電荷ボゾン (W^-) に関係づけることが妥当である.

最後に, W ボゾンの伝播関数,

$$\langle 0|\mathrm{T}\left\{W^\alpha(x)W^{\beta\dagger}(y)\right\}|0\rangle \equiv \mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(x-y, m_W) \tag{16.28}$$

が必要である. ここでは伝播関数が質量 m_W に依存することをあらわに表示しておく. この伝播関数は 3.4 節でスカラー中間子の伝播関数を得たのと同様の方法で導く

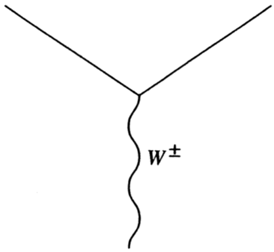


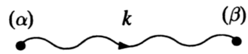
図16.4　IVB相互作用の基本結節点.

ことができる．ここでは導出過程を省いて[7]，結果だけを引用する．運動量空間への移行は，

$$\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(x,m_W)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(k,m_W) \tag{16.29}$$

に従い，運動量空間における W 伝播関数は次式で与えられる．

$$\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(k,m_W)=\frac{\mathrm{i}\left(-g^{\alpha\beta}+k^\alpha k^\beta/m_W^2\right)}{k^2-m_W^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{16.30}$$



16.4　IVB理論に対するFeynman規則

レプトン的過程を摂動論によって扱うためのFeynman規則を簡単に紹介する．

相互作用(16.7)によって生じる基本結節点（ヴァーテックス）を図16.4に示す．これは２本のレプトン線（レプトン数保存カレントを表す）と１本の W ボゾン線から成る．結節点（ヴァーテックス）における制約は，レプトン数の保存と電荷保存だけである．図16.4は多くの異なる過程をまとめて代表しているが，そこには，たとえば図16.5に示すような過程が含まれる．各過程において，$W^\pm$ ボゾンの吸収もしくは放射が電荷保存条件を満たす符号を選ぶような形で起こる．レプトン相互作用(16.7)をS行列展開(6.23)に代入すると，QEDにおけるFeynman規則１(7.3節)に対応する規則が，次のようになることが分かる．

10. (IVB相互作用の) 各結節点（ヴァーテックス）に，次の因子を充てる．

$$-\mathrm{i}g_W\gamma^\alpha(1-\gamma_5) \tag{16.31}$$

[7] 具体的な導出は，D. Bailin, *Weak Interaction* (p.435脚註参照) の pp.96-97 に与えられている．W 伝播関数と光子伝播関数の関係については C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980, Section 3-2-3 において論じられている．

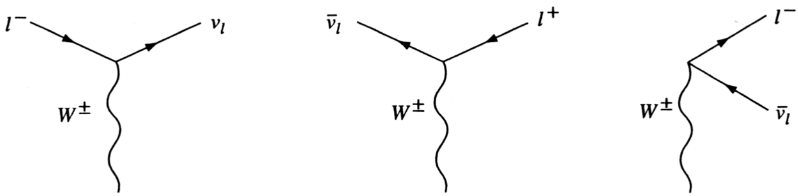
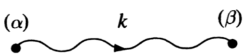


図16.5 図16.4のダイヤグラムによって表される過程の３つの例.

7.3節で与えたフェルミオンの伝播関数と外線に関するFeynman規則は，粒子の種類の表示を置き換えるだけで，電子だけでなく，すべてのレプトンへ流用できる．フェルミオン伝播関数(7.48)に関するFeynman規則3において，mは議論の対象となるレプトンの質量m_lやm_{ν_l} $(l = e, \mu, \tau)$を表すことになる．外線に関するFeynman規則4については，式(7.49a)と式(7.49b)を適宜，負電荷レプトンl^-とニュートリノν_lを表す因子に置き換え，式(7.49c)と式(7.49d)を適宜，反粒子l^+と$\bar{\nu}_l$の因子に置き換えて考えればよい．規則として追加する必要があるのは，規則2と規則4の光子の関わる部分に対応する，Wの内線と外線のための規則である．

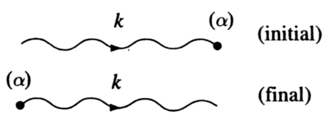
11. Wボゾン内線それぞれに対して，その内線に付記されている運動量$\boldsymbol{k}$に応じて，次の因子を充てる．

$$\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\alpha\beta}(k, m_W) = \frac{\mathrm{i}\left(-g_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta / m_W^2\right)}{k^2 - m_W^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{16.30}$$



12. 始状態および終状態からの各Wボゾン外線に対して，次の因子を充てる．

$$\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k}) \tag{16.32}$$



光子の場合と同様に，複素偏極ベクトルを採用する場合には，終状態のWボゾンに対して$\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$の代わりに$\varepsilon^*_{r\alpha}(\mathbf{k})$を充てなければならない．

16.5 崩壊頻度

ミュー粒子の崩壊頻度を計算する前に，任意の崩壊過程の頻度をFeynman振幅を用いて表す一般式を導いておく．粒子PがN個の粒子$P'_1, P'_2, \ldots, P'_N$へ崩壊する

過程を考える.

$$P \;\to\; P'_1 + P'_2 + \cdots + P'_N \tag{16.33}$$

S行列要素とFeynman振幅の関係(8.1)は，次式に還元される.

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(\sum p'_f - p\Big)\frac{1}{(2VE)^{1/2}}\prod_f\Big(\frac{1}{2VE'_f}\Big)^{1/2}\prod_l\big(2m_l\big)^{1/2}\mathcal{M} \tag{16.34}$$

ここで $p=(E,\mathbf{p})$ は始状態の粒子，$p'_f=(E'_f,\mathbf{p}'_f)$ $(f=1,\ldots,N)$ は終状態の各粒子の4元運動量であり，l はすべてのフェルミオン外線を対象とする番号である．式(16.34)により，与えられた始状態から特定のひとつの終状態への崩壊頻度(単位時間あたりの遷移確率)は，次式で与えられる.

$$w = (2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(\sum p'_f - p\Big)\frac{1}{2E}\Big(\prod_f\frac{1}{2VE'_f}\Big)\Big(\prod_l\big(2m_l\big)\Big)|\mathcal{M}|^2 \tag{16.35}$$

これは式(8.6)と類似の式である．崩壊過程(16.33)によって粒子 P'_1 が運動量 $\mathbf{p}'_1$ 近傍の範囲 $\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_1$ に生成され,... という微分崩壊頻度 $\mathrm{d}\Gamma$ は，w にこれらの状態の数(式(8.7))を掛けることで与えられる.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Gamma &= w\prod_f\frac{V\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3}\\ &= (2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(\sum p'_f - p\Big)\frac{1}{2E}\Big(\prod_l\big(2m_l\big)\Big)\Big(\prod_f\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3 2E'_f}\Big)|\mathcal{M}|^2\end{aligned} \tag{16.36}$$

この式が最終的な結果である．解析をさらに進めるには，特定の過程を考えなければならない．式(16.36)に現れているエネルギー-運動量保存を表す δ 関数は，終状態の変数に関する積分によって除かれる．式(16.36)は始状態の粒子も終状態のすべての粒子もスピン状態が確定している場合の遷移頻度を表している．崩壊過程(16.33)に関する全崩壊頻度 Γ を得るためには，式(16.36)において，全ての終状態スピンの和を取り，すべての終状態運動量に関する積分を行わなければならない.

ここまで粒子 P の崩壊モード(16.33)だけを考えた．一般には，いくつかの異なる崩壊モードが併存し得る．崩壊頻度 Γ のモード(16.33)への分岐比 B は，次式で定義される.

$$B = \frac{\Gamma}{\sum\Gamma} \tag{16.37}$$

$\sum \Gamma$ はすべての崩壊モードでの崩壊頻度の和，すなわち全崩壊頻度を表す．(全崩壊幅 [total decay width] とも呼ばれる．) 粒子 P の寿命は，次式で与えられる．

$$\tau = \frac{1}{\sum \Gamma} = \frac{B}{\Gamma} \tag{16.38}$$

16.6 IVB理論の応用

本節ではIVB理論を3種類のレプトン的過程へ応用してみる．すなわち (i) ミュー粒子崩壊，(ii) ニュートリノ散乱，(iii) W ボゾンのレプトン化崩壊を扱う．ミュー粒子崩壊については詳しい解析を与えるが，これによって読者は類似の計算ができるようになるはずなので，残りの2例については簡単な言及にとどめる．

16.6.1 ミュー粒子の崩壊

最初の応用として，最もよく研究されているレプトン的過程のひとつであるミュー粒子の崩壊を考察する．

$$\mu^-(p,r) \;\to\; e^-(p',r') + \bar{\nu}_e(q_1,r_1) + \nu_\mu(q_2,r_2) \tag{16.39}$$

p はミュー粒子の4元運動量を表し，r はスピンを表す．他の記号も同様である．摂動の最低次では，この過程は図16.6のFeynmanグラフで表される．Feynman規則に基づいてFeynman振幅を求めると，次のようになる．

$$\mathcal{M} = -g_W^2\left[\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\alpha(1-\gamma_5)v(\mathbf{q}_1)\right]\frac{\mathrm{i}(-g_{\alpha\beta}+k_\alpha k_\beta/m_W^2)}{k^2-m_W^2+\mathrm{i}\varepsilon}\left[\bar{u}(\mathbf{q}_2)\gamma^\beta(1-\gamma_5)u(\mathbf{p})\right] \tag{16.40}$$

スピン添字の表記は省略してある．k は W 粒子の運動量であるが，ここでは，

$$k = p - q_2 = p' + q_1 \tag{16.41}$$

である．$m_W \to \infty$ の極限において，Feynman振幅(16.40)は次式へ簡約される．

$$\mathcal{M} = -\frac{\mathrm{i}G}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^\alpha(1-\gamma_5)v(\mathbf{q}_1)\right]\left[\bar{u}(\mathbf{q}_2)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u(\mathbf{p})\right] \tag{16.42}$$

G (Fermi結合定数) は，次のように定義される．

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \left(\frac{g_W}{m_W}\right)^2 \tag{16.43}$$

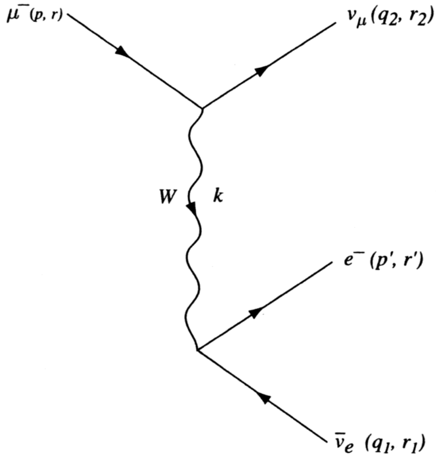


図16.6　ミュー粒子の崩壊.

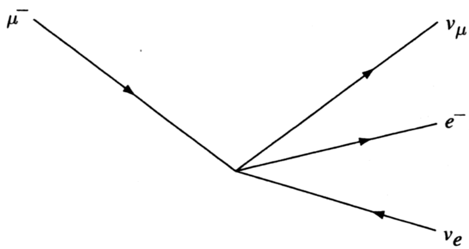


図16.7　ミュー粒子の崩壊を点接触型相互作用(16.44)で記述するFeynmanダイヤグラム.

上と同じ式は，次の形の相互作用を想定した1次摂動によってFeynman振幅を計算しても得られるものである.

$$\mathcal{H}_{\rm I}^{(\rm F)}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} J^\alpha(x) J_\alpha^\dagger(x) \tag{16.44}$$

式(16.44)は4つのレプトン場の点接触型相互作用を表している．原子核のβ崩壊(16.3)を記述するために，このような点接触型相互作用を初めて提案したのはFermiであり(1934年)，Gは弱い相互作用におけるFermiの結合定数と呼ばれている．振幅(16.42)を表すFeynmanダイヤグラムは，図16.7のように表される.

m_Wが大きいけれども有限の値を持つ場合，IVB相互作用によって計算される振幅

(16.40) と，点接触型相互作用によって計算される振幅(16.42) の違いは $(m_\mu/m_W)^2$ 程度，すなわち W の質量(16.1) によれば 10^{-6} 程度の違いにすぎない．崩壊頻度の推定値の違いも同程度になる．したがってミュー粒子崩壊の記述に関しては，どちらの描像を採用しても実質的に同じと見てよい．これは低エネルギー過程において特徴的なことで，伝播関数(16.30) が実効的に $\mathrm{i}g_{\alpha\beta}/m_W^2$ に置き換わる．その結果，ミュー粒子の崩壊頻度の計算に振幅(16.42) を使えるわけである．

ミュー粒子の微分崩壊頻度は，一般式(16.36) から，次のように表される．

$$\mathrm{d}\Gamma = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p' + q_1 + q_2 - p)\,\frac{m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}}{E}\,\frac{1}{(2\pi)^9}\,\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'}{E'}\,\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}_1}{E_1}\,\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}_2}{E_2}\,|\mathcal{M}|^2 \tag{16.45}$$

ここで $p \equiv (E, \mathbf{p})$，$p' \equiv (E', \mathbf{p}')$，$q_i \equiv (E_i, \mathbf{q}_i)$ $(i = 1, 2)$ である．

式(16.45) から全崩壊頻度を得るために，終状態のスピン状態すべてについて和を取り，終状態の運動量全体の積分を行う必要がある．

スピンを先に扱うことにする．ミュー粒子の寿命はもちろん，スピン状態には依存しない．したがってミュー粒子の始状態のスピンについても平均化を施すことにして，結果を対角和(トレース)の形で表現してもよい[8]．8.2節で展開した標準的な技法を用いて，終状態スピンに関する和の計算と始状態スピンに関する平均化を行うと，次の結果を得る．

$$\begin{aligned}
&m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu}\,\frac{1}{2}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2 \\
&\quad= \frac{G^2}{64}\,\mathrm{Tr}\left[(\not{p}' + m_e)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)(\not{q}_1 - m_{\nu_e})\gamma^\beta(1-\gamma_5)\right] \\
&\qquad\times \mathrm{Tr}\left[(\not{q}_2 + m_{\nu_\mu})\gamma_\alpha(1-\gamma_5)(\not{p} + m_\mu)\gamma_\beta(1-\gamma_5)\right] \\
&\quad= \frac{G^2}{64}\,\mathrm{Tr}\left[\not{p}'\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\not{q}_1\gamma^\beta(1-\gamma_5)\right]\mathrm{Tr}\left[\not{q}_2\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\not{p}\gamma_\beta(1-\gamma_5)\right]
\end{aligned} \tag{16.46}$$

最後の行では $m_{\nu_e} \to 0$，$m_{\nu_\mu} \to 0$ の極限を取った．

式(16.46) の最終行の第 1 の対角和(トレース)，

$$E^{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Tr}\left[\not{p}'\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\not{q}_1\gamma^\beta(1-\gamma_5)\right] \tag{16.47}$$

を評価しよう．次の関係を利用する．

$$[\gamma_5, \gamma^\alpha]_+ = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \qquad (1-\gamma_5)^2 = 2(1-\gamma_5)$$

[8] ニュートリノの質量がゼロであれば，生成した $\bar{\nu}_e$ と ν_μ は確定したヘリシティを持つ．これらのニュートリノのヘリシティについて和を取り，相互作用におけるヘリシティ射影演算子に適正なヘリシティ状態を選ばせることによって，結果を再び対角和として表すことができる．

すると,

$$E^{\alpha\beta} = 2p'_\mu q_{1\nu} \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta (1-\gamma_5)\right]$$

が得られ，更に式(A.17), (A.21) を利用すれば，これを次のように書ける.

$$E^{\alpha\beta} = 8p'_\mu q_{1\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} \tag{16.48a}$$

ここで $x^{\mu\alpha\nu\beta}$ は，次のように定義される.

$$x^{\mu\alpha\nu\beta} \equiv g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} + \mathrm{i}\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \tag{16.49}$$

直ちに，式(16.46) の第２の対角和(トレース)も与えられる.

$$M_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Tr}\left[\not{q}_2 \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \not{p} \gamma_\beta (1-\gamma_5)\right] = 8q_2^\sigma p^\tau x_{\sigma\alpha\tau\beta} \tag{16.48b}$$

式(16.48a) と式(16.48b) を式(16.46) に代入すると，次式を得る.

$$m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{spin}} |\mathcal{M}|^2 = G^2 p'_\mu q_{1\nu} x^{\mu\alpha\nu\beta} q_2^\sigma p^\tau x_{\sigma\alpha\tau\beta} \tag{16.50}$$

$x^{\mu\alpha\nu\beta}$ の定義式(16.49) と式(A.14c) により,

$$x^{\mu\alpha\nu\beta} x_{\sigma\alpha\tau\beta} = 4g^\mu_\sigma g^\nu_\tau \tag{16.51}$$

なので，式(16.50) から，$m_{\nu_e} \to 0$, $m_{\nu_\mu} \to 0$ の極限におけるスピン和の最終的な結果が得られる.

$$m_\mu m_e m_{\nu_e} m_{\nu_\mu} \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{spin}} |\mathcal{M}|^2 = 4G^2 (pq_1)(p'q_2) \tag{16.52}$$

式(16.45) と式(16.52) を組み合わせると，非偏極の微分崩壊頻度が得られる.

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{4G^2}{(2\pi)^5 E} (pq_1)(p'q_2) \delta^{(4)}(p' + q_1 + q_2 - p) \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'}{E'} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}_1}{E_1} \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}_2}{E_2} \tag{16.53}$$

次に相空間積分を行うが，まずは次式の，ニュートリノの運動量に関する積分から始める.

$$I^{\mu\nu}(q) \equiv \int \mathrm{d}^3\mathbf{q}_1 \mathrm{d}^3\mathbf{q}_2 \frac{q_1^\mu q_2^\nu}{E_1 E_2} \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - q) \tag{16.54}$$

$$q \equiv p - p' \tag{16.55}$$

積分(16.54) の Lorentz 共変性により，最も一般的な形として次のように表し得る.

$$I^{\mu\nu}(q) = g^{\mu\nu} A(q^2) + q^\mu q^\nu B(q^2) \tag{16.56}$$

この式から，次の関係が導かれる．

$$g_{\mu\nu}I^{\mu\nu}(q) = 4A(q^2) + q^2B(q^2) \tag{16.57a}$$

$$q_\mu q_\nu I^{\mu\nu}(q) = q^2A(q^2) + (q^2)^2B(q^2) \tag{16.57b}$$

これ以降，ニュートリノの質量をゼロと置くことにして $q_1^2 = q_2^2 = 0$ とする．式(16.54) の δ 関数により，次のように置ける．

$$q^2 = 2(q_1q_2) \tag{16.58}$$

$A(q^2)$ と $B(q^2)$ を見出すために，式(16.57) の左辺を計算する．まず，式(16.54) と式(16.58) により，次のようになる．

$$g_{\mu\nu}I^{\mu\nu}(q) = \frac{q^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}_1}{E_1}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{q}_2}{E_2}\delta^{(4)}(q_1+q_2-q) \equiv \frac{1}{2}q^2I(q^2) \tag{16.59}$$

上式で定義された積分 $I(q^2)$ は不変量であることが見て取れるので，任意の座標系において評価してよい．我々は２つのニュートリノの運動量中心の座標系を選ぶことにする．この系では $\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_2$ なので $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ であり，ニュートリノのエネルギー ω は双方とも等しく，

$$\omega \equiv E_1 = |\mathbf{q}_1| = E_2 = |\mathbf{q}_2| \tag{16.60}$$

なので，

$$I(q^2) = \int\mathrm{d}^3\mathbf{q}_1\frac{\delta(2\omega - q_0)}{\omega^2} = 2\pi \tag{16.61}$$

であり，式(16.59) から，次の結果が得られる．

$$g_{\mu\nu}I^{\mu\nu}(q) = \pi q^2 \tag{16.62a}$$

同様に，式(16.54), (16.58), (16.61) により，次式を得る．

$$q_\mu q_\nu I^{\mu\nu}(q^2) = \left(\frac{1}{2}q^2\right)^2 I = \frac{1}{2}\pi(q^2)^2 \tag{16.62b}$$

式(16.57) と式(16.62) から $A(q^2)$ と $B(q^2)$ を決めることができ，これを式(16.56) に代入すると，次式が得られる．

$$I^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{6}\pi\left(g^{\mu\nu}q^2 + 2q^\mu q^\nu\right) \tag{16.63}$$

式(16.63)と式(16.53)により，ミュー粒子崩壊で生成する電子の運動量が $\mathbf{p}'$ 近傍の範囲 $\mathrm{d}^3\mathbf{p}'$ に入るような微分崩壊頻度は，次式となる．

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{2\pi}{3}\frac{G^2}{(2\pi)^5 E}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'}{E'}\left[(pp')q^2 + 2(pq)(p'q)\right] \tag{16.64}$$

最後に式(16.64)を，生成する電子の運動量 $\mathbf{p}'$ 全体にわたり積分する．始状態においてミュー粒子の静止系を選ぶと，

$$p = (m_\mu, \mathbf{0}), \quad q_0 = m_\mu - E', \quad \mathbf{q} = -\mathbf{p}' \tag{16.65}$$

となり，この座標系で式(16.64)は次のようになる．

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Gamma &= \frac{2\pi}{3}\frac{G^2}{(2\pi)^5 m_\mu}|\mathbf{p}'|\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega' \\ &\quad\times\left[\left(m_\mu^2 + m_e^2 - 2m_\mu E'\right)m_\mu E' + 2m_\mu\left(m_\mu - E'\right)\left(m_\mu E' - m_e^2\right)\right]\end{aligned} \tag{16.66}$$

ここで $\mathrm{d}^3\mathbf{p}' = |\mathbf{p}'|E'\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega'$ と置いた．m_e^2/m_μ^2 の項を無視するならば，式(16.66)は次のように簡約される．

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{2\pi}{3}\frac{G^2}{(2\pi)^5}m_\mu E'2\,\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega'(3m_\mu - 4E') \tag{16.67}$$

式(16.67)を電子放射の全方向 Ω' およびその全エネルギー範囲 $0 \le E' \le \frac{1}{2}m_\mu$ にわたって積分すると，全崩壊頻度が次のように求まる．

$$\Gamma = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \tag{16.68}$$

$\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$ が唯一のミュー粒子崩壊モードと見なすと(実験的に求めた分岐比は98.6%である)，ミュー粒子の寿命は次式で与えられる．

$$\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma} = \frac{192\pi^3}{G^2 m_\mu^5} \tag{16.69}$$

式(16.69)において，実験値として $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$ と $m_\mu = 105.7\,\mathrm{MeV}$ を当てはめると，Fermi結合定数の値が決まる．

$$G = 1.16 \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2} \tag{16.70}$$

この G の値を式(16.43)に代入し，$m_W \approx 80\,\mathrm{GeV}$ も考慮すると，

$$\frac{g_W^2}{4\pi} = \frac{G}{4\pi\sqrt{2}}m_W^2 \approx 4 \times 10^{-3} \tag{16.71}$$

という数値が得られる．これは微細構造定数 $e^2/4\pi \approx 7.3 \times 10^{-3}$ と同程度の小さい数値なので，弱い相互作用も最低次の摂動において，よい記述を与えるものと考えられる．

式(16.70) よりも更に正確な G の値は，ミュー粒子の寿命の最も正確な実験値，

$$\tau_\mu = (2.19703 \pm 0.00004) \times 10^{-6}\mathrm{s} \tag{16.72}$$

に基づいて得られる．この目的のためには崩壊頻度 Γ の式において電子質量 m_e を含む項も考えなければならないし (式(16.67) ではなく式(16.66) から Γ を導く)，QED の輻射補正も含め，またもちろん $\mu^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$ モードの分岐比 98.6％も考慮する必要がある．このようにして次の数値が得られる．

$$G = (1.16637 \pm 0.00002) \times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2} \tag{16.73}$$

ミュー粒子の寿命からは，結合定数 G が決まるだけである．理論の検証のためには，さらに詳細な理論の予測と実験結果との比較が必要である．たとえば (i) ミュー粒子の崩壊で生成した電子のエネルギースペクトル，(ii) 偏極したミュー粒子の崩壊により生成した電子のエネルギースペクトルと角度分布，(iii) 非偏極のミュー粒子の崩壊により生成した電子のヘリシティ，などが検証の対象になる．これらの実験のある部分は充分に高精度に行われており，そのようなデータに対しては，輻射補正を含めた理論予想との比較が必要である．すべての場合において理論と実験との良好な一致が認められている．たとえば非偏極のミュー粒子の崩壊によって生成した電子の平均ヘリシティは -1.008 ± 0.057 となり，理論の予想と合致している．これに関する定性的な議論は式(11.16) のところで与えてある[9]．

最後に，レプトンの相互作用(16.6)-(16.7) の普遍性 (g_W すなわち G の値の共通性) の証拠を，次のタウ粒子の崩壊，

$$\tau^- \;\to\; e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \tag{16.74}$$

との比較に基づいて指摘しておく．タウ粒子の寿命 τ_τ は，τ_μ の式(16.69) において m_μ を m_τ に置き換え，崩壊(16.74) の分岐比 $B = 0.178 \pm 0.001$ を考慮することによって直ちに得られる．式(16.38) を用いると，

$$\tau_\tau = B\frac{192\pi^3}{G^2 m_\tau^5} = B\tau_\mu\left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^5 \tag{16.69a}$$

となる．ここに τ_μ，B，m_μ/m_τ の値を代入すると，理論予想値は $\tau_\tau = (2.85 \pm 0.02) \times 10^{-13}$ s と与えられる．実験値は $(2.91 \pm 0.02) \times 10^{-13}$ s となっているが，

[9] 偏極電子や偏極ミュー粒子を含むこれらの計算の詳細については D. Bailin, *Weak Interaction* (p.435脚註) を参照されたい．

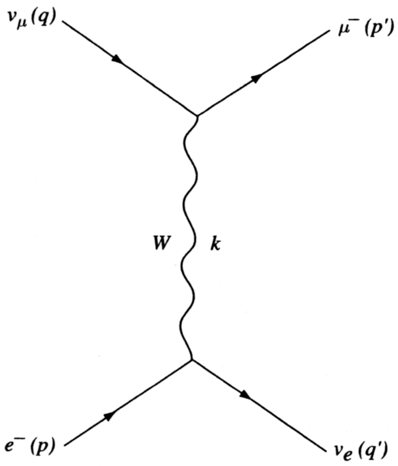


図16.8　$\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$ (逆ミュー粒子崩壊).

実験の困難さや理論予想において採用した近似を考慮するならば，かなりよい一致であると言える．(B や τ_τ としてここで引用した値は，もっと大きな誤差を持つ多くの結果を平均して得たものである．)

16.6.2　ニュートリノ散乱

ミュー粒子の崩壊とは異なり，充分な高エネルギーにおけるニュートリノ散乱過程は，仲介ベクトルボゾンの挙動の影響を反映したものになる．次の過程を考えよう．

$$\nu_\mu + e^- \;\to\; \nu_e + \mu^- \tag{16.75}$$

この過程はしばしば逆ミュー粒子崩壊と呼ばれる．摂動の最低次では，この過程は，図16.8のFeynmanグラフで表される．各粒子の運動量も図中に示した．これに対応するFeynman振幅を導くことは読者の練習問題とする．その結果は，$(m_\mu m_e/m_W^2)$ のオーダーの項を省くと次のようになる．

$$\mathcal{M} = \left\{\frac{m_W^2}{m_W^2 - k^2}\right\}(-\mathrm{i})\left(\frac{g_W}{m_W}\right)^2\left[\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u(\mathbf{q})\right]\left[\bar{u}(\mathbf{q}')\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u(\mathbf{p})\right] \tag{16.76}$$

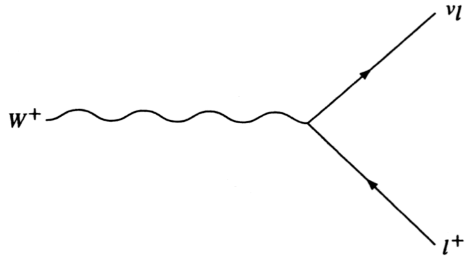


図16.9 W^+ボゾンのレプトン化崩壊モード.

この式の中のベクトル $\boldsymbol{k}$ は，中間状態における W ボゾンの運動量で，次のように与えられる.

$$k = p - q' = p' - q \tag{16.77}$$

式(16.76) の $\{\cdots\}$ の因子は，微分散乱断面積において，

$$\left\{ \frac{m_W^2}{m_W^2 - k^2} \right\}^2 \tag{16.78}$$

という因子を生じる．$m_W \to \infty$ の極限において，この因子は 1 になり，得られる微分断面積は，式(16.43) の関係の下で点接触型相互作用の結果と等しくなる．m_W が有限の場合，点接触型相互作用による予想からのずれは k^2/m_W^2 のオーダーになる．$m_W \approx 80\,\mathrm{GeV}$ で，実験的に利用できる範囲で最も高エネルギーのニュートリノを用いても補正効果の検出は困難なので，ここでは逆ミュー粒子崩壊について，これ以上の考察は行わない．この散乱実験や，他にも最低次の摂動が，ひとつの W ボゾンの交換によって記述されるような同様の過程の実験に関しては，IVB 理論が実験結果とよく一致することを述べておく.

16.6.3 Wボゾンのレプトン化崩壊

最後に，次のレプトン化崩壊 (leptonic decay) の過程を考察しよう.

$$W^+ \;\to\; l^+ + \nu_l \tag{16.79}$$

これを表す Feynman グラフを図16.9 に示す．この崩壊頻度の導出は読者の練習問題とする．その結果は，

$$\Gamma_l = \frac{g_W^2 m_W}{6\pi}\left(1 - \frac{m_l^2}{m_W^2}\right)^2\left(1 + \frac{m_l^2}{2m_W^2}\right) \tag{16.80}$$

であるが，$m_l^2 \ll m_W^2$ とすると $(e, \mu, \tau$ すべて該当)，次式が得られる．

$$\Gamma_l = \frac{g_W^2 m_W}{6\pi} \tag{16.81}$$

したがって，崩壊モード(16.79)の分岐比を B_l とすると，Wボゾンの寿命が次のように与えられる．

$$\tau_W = \frac{6\pi B_l}{g_W^2 m_W} \tag{16.82}$$

式(16.79)の $l = e, \mu, \tau$ への崩壊モード以外では，Wボゾンが強粒子(ハドロン)へ崩壊するモードもある．測定された３つの分岐比の値 B_l $(l = e, \mu, \tau)$ は誤差範囲内で式(16.81)の予言と整合しており，分岐比の平均は $B_l = 0.1080 \pm 0.0009$ である．これを式(16.82)に代入して，式(16.43)と式(16.70)を用いると，寿命の予想値は $(1.38 \pm 0.01) \times 10^{-24}$ s と与えられる．これは測定された値 $(1.41 \pm 0.03) \times 10^{-24}$ s とよく一致している．

16.7　ニュートリノの質量

ここまで我々は，ニュートリノが Dirac 場に対応し，その自由場ラグランジアン密度が通常の形，

$$\mathcal{L}_0 = \sum_l \bar{\psi}_{\nu_l}(x)(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_{\nu_l})\psi_{\nu_l}(x) \tag{16.83}$$

で与えられるものと仮定してきた．各ニュートリノの質量の値は分かっていないが，実験的な許容上限は 2 eV 程度である．ニュートリノの質量がゼロでないことに伴う遷移頻度の補正は $(m_{\nu_e}/m_e)^2$ のオーダーにすぎず，測定された遷移頻度を理論値と比較する場合にはニュートリノの質量をゼロと置いても問題はない．本書全体を通じてこの措置を採用する[10]．しかしながらニュートリノの質量が正確にゼロでないならば，そのことによって興味深い現象が起こる．ここでは２つの重要な現象を論じておく．ひとつはニュートリノ振動，もうひとつはニュートリノがそれ自身の反粒子であるという可能性から生じるレプトン数保存の破れである．

[10] 我々はニュートリノの質量を最初からゼロと置くわけにはいかない．スピノル規格化の慣例(A.27)のためである．これは Feynman 振幅において因子 $m_\nu^{-1/2}$ を生じるが，これはＳ行列要素との関係式(8.1)における Feynman 質量因子との間で相殺されるので，この極限を考えることに懸念はない．

16.7.1 ニュートリノ振動

各ニュートリノがゼロでない質量を持つことを想定するならば，ニュートリノ混合という新たな現象を考えることもできる．電子，ミュー粒子，タウ粒子と結合するニュートリノ状態 ν_e, ν_μ, ν_τ は質量が確定していないものと仮定する．すなわちこれらは質量が m_1, m_2, m_3 に確定している 3 つの質量固有状態 ν_1, ν_2, ν_3 にそのまま対応するのではなく，これらの 1 次結合として与えられる．

$$\nu_l = \sum_i U_{li}\nu_i, \quad l = e, \mu, \tau, \quad i = 1, 2, 3 \tag{16.84}$$

ここで $U \equiv U_{li}$ は 3×3 混合行列で，その要素は実験から決めるべきものである．

3 つのニュートリノ状態 ν_e, ν_μ, ν_τ 全部の混合を考える代わりに，より簡単な 2 つの状態の混合を考察する．これはしばしば良好な近似と見なし得る．2 つの香りの状態を ν_α，ν_β と表し，2 つの質量固有状態を ν_1，ν_2 と表すと，一般的な混合(16.84)は，次式に還元する．

$$\nu_\alpha = \nu_1 \cos\theta + \nu_2 \sin\theta \tag{16.85a}$$

$$\nu_\beta = -\nu_1 \sin\theta + \nu_2 \cos\theta \tag{16.85b}$$

もし $\theta = 0$ であれば，$\nu_\alpha = \nu_1$，$\nu_\beta = \nu_2$ であって混合は起こらないが，$\theta \neq 0$ と仮定すると，興味深い予言がいくつか導かれる．たとえば時刻 $t = 0$ において運動量 $\mathbf{p}$ の ν_α ビームが生成されたとすると，それに含まれる ν_1 成分と ν_2 成分は，質量の違いのために少し異なるエネルギーを持つ．量子力学的にそれらに付随する波動は少し異なる振動数を持つことになるので，時間に依存する量子力学的な干渉効果が現れ，ビーム径路の途上でビームの組成が変動する．ビームが生成位置から距離 L を進んだときに“ニュートリノ反転”$\nu_\alpha \to \nu_\beta$ が起こっている確率は次式で与えられる[11)]．

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = \sin^2\theta \sin^2\left[\frac{(m_2^2 - m_1^2)L}{4E}\right] \tag{16.86}$$

E はビームエネルギーを表し，$E \gg m_1, m_2$ を仮定している．$\theta \neq 0$ のときには ν_β を見出す確率が存在し，それに対応して ν_α の強度は低下する．このような効果は $L \gtrsim E/(m_1^2 - m_2^2)$ の距離尺度において見られる．

この現象はニュートリノ振動と呼ばれ，振動が起こることの明確な実験的証拠も得られている．ここではその詳細には触れずに，次の結果だけに言及しておく．3 成分

---

11) 式(16.86) の導出を含むニュートリノ振動に関する完全な議論については B. R. Martin and G. Shaw (p.271 脚註参照) Section 2.3 を参照.

混合を想定した完全な解析の結果によると，ニュートリノ質量の自乗の差が次のように推定される．

$$7.6 \times 10^{-5} \lesssim |m_2^2 - m_1^2| \lesssim 8.6 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV}$$
$$1.9 \times 10^{-3} \lesssim |m_3^2 - m_2^2| \lesssim 3.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{eV} \tag{16.87}$$

これらの結果は，初期の推測とは違って，ニュートリノがゼロでない質量を持つという事実を確実なものとした．しかし各質量の差(16.87)は極めて少ないので，ニュートリノ振動を実際に観測するためには，非常に長い距離を飛行したニュートリノを観測する必要がある．

場の理論に戻ると，これらの結果から，自由場ラグランジアン(16.83)を次のように置き換えなければならない．

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{j=1}^{3} \bar{\psi}_j(x)(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_j)\psi_j(x) \tag{16.88}$$

ここで ψ_j は質量固有状態 ν_j $(j = 1, 2, 3)$ を表している．これをニュートリノ ν_e，ν_μ，ν_τ に対応する場，

$$\psi_{\nu_l}(x) = \sum_j U_{lj}\psi_j(x) \tag{16.89}$$

によって書き換えると，次のようになる．

$$\mathcal{L}_0 = \sum_l \bar{\psi}_{\nu_l}(x)\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi_{\nu_l}(x) - \sum_{l,l'} \bar{\psi}_{\nu l}(x)G_{ll'}\psi_{\nu_{l'}}(x) \tag{16.90a}$$

$G_{ll'}$ はエルミート行列で，

$$G_{ll'} = \sum_j U_{lj}m_j U^\dagger_{jl'} \tag{16.90b}$$

と与えられる．本書において我々は，ニュートリノ質量がゼロの極限の近似を常に採用する．式(16.89)と式(16.90)は，この極限においてゼロになる項の違いしかないので，ニュートリノについても簡単な形の自由場ラグランジアン(16.83)をそのまま使い続けることにする．

16.7.2　Diracニュートリノか Majoranaニュートリノか？

電気的に中性な粒子には，それ自身と区別される反粒子が，存在するかもしれないし，存在しないかもしれない．つまり中性レプトンには2通りの可能な記述方法が

ある．ニュートリノは中性粒子であるが，我々が想定してきたように，区別される反粒子を持つようなニュートリノのモデルは“Diracニュートリノ”と呼ばれる．これに対して，区別される反粒子を持たないようなニュートリノのモデルは“Majoranaニュートリノ”と呼ばれる．弱い相互作用の構造により，これらの２通りの記述は，ニュートリノの質量がゼロでない場合にのみ実験的に違いを検証し得る．本項では，問題を簡単にするために，ニュートリノ混合の効果を無視して１種類のニュートリノだけを考え，これらの２通りの記述の可能性を論じてみる．

粒子と反粒子の対称性は，Majorana表示によって最も明確に表現できる(4.3節と付録A.8を参照)[12]．この表示ではDirac行列が虚数で表され，Dirac波動演算子(4.49a)が実の演算子になる．したがって3.1節と3.2節で論じた実スカラー場と複素スカラー場からの類推により，２つのタイプの場を区別できる．Dirac場はMajorana表示において複素数であり，量子化された場の演算子は式(4.51)の形に展開することができて $c_r^\dagger$ は粒子(ニュートリノ)の生成演算子，$d_r^\dagger$ は反粒子(反ニュートリノ)の生成演算子となる．しかし代わりにMajorana表示において実数のMajorana場を考えることもできて，これに対応する場の演算子は次のように展開される．

$$\psi(x)=\sum_{r,\mathbf{p}}\left(\frac{m}{VE_{\mathbf{p}}}\right)^{1/2}\left[c_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}+c_r^\dagger(\mathbf{p})u_r^*(\mathbf{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right] \tag{16.91}$$

ここで $c_r(\mathbf{p})$ はニュートリノ消滅演算子，$c_r^\dagger(\mathbf{p})$ はニュートリノ生成演算子である．この場合，独立な場 $\psi^\dagger(x)$ は存在せず，ψ 自身と区別される反粒子は無い．

まとめると，Majoranaニュートリノに対して運動量を指定するならば，２つの可能なヘリシティ状態があり，これ自体と区別できるような反ニュートリノ状態は存在しない．他方，Diracニュートリノでは２つのニュートリノ状態と２つの反ニュートリノ状態があり，レプトン数(16.9)への寄与は反対符号になる．

このような２通りの記述の，質量ゼロの極限における関係は，次の場を考えることによって明確になる．

$$\psi^{\mathrm{L}}(x)=P_{\mathrm{L}}\psi(x),\quad \psi^{\mathrm{R}}(x)=P_{\mathrm{R}}\psi(x) \tag{16.92}$$

P_{L} と P_{R} は射影演算子(16.14)である．Dirac方程式にこれらの射影演算子を作用させると，ψ^{L} と ψ^{R} は，互いに結合したDirac方程式を満たすことが容易に分かる．

$$\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi^{\mathrm{L}}(x)-m\psi^{\mathrm{R}}(x)=0,\quad \mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi^{\mathrm{R}}(x)-m\psi^{\mathrm{L}}(x)=0 \tag{16.93}$$

[12] 代わりにDirac型の $\gamma^{0\,\mathrm{T}}=\gamma^0$, $\gamma^{2\,\mathrm{T}}=\gamma^2$ を満たす表示を用いて議論することもできる．例えば T-P. Cheng and L-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press (1984), pp.412-414 を参照．

これらの式は質量がゼロの極限において互いに分離する．相互作用が式(16.7)と式(16.16)によって与えられるので，この極限では $\psi^{\mathrm{L}}(x)$ だけが理論に含まれ，$\psi^{\mathrm{R}}(x)$ は理論から除かれる．さらに P_{L} はこの極限においてヘリシティ射影演算子になり，Diracニュートリノに関しては式(16.12)のレプトン数保存の議論により，電子がひとつ生成する際にヘリシティが負のニュートリノの消滅が伴うか，もしくはヘリシティが正の反ニュートリノの生成が伴うことが可能である．同じ議論をMajorana表示の場(16.91)によって記述されるMajoranaニュートリノに適用すると，電子がひとつ生成する際にヘリシティが負のニュートリノの消滅が伴うか，もしくはヘリシティが正のニュートリノの生成を伴うことが可能である．したがってレプトン数の定義を，式(16.9)から，

$$N(e) = N(e^-) - N(e^+) + N(\nu_-) - N(\nu_+) \tag{16.94}$$

へ変更すれば，レプトン数の保存が維持されることになる．ν_- と ν_+ はそれぞれヘリシティが負の電子ニュートリノ状態と，ヘリシティが正の電子ニュートリノ状態を表す．同様の解析を電子の消滅，陽電子の生成，陽電子の消滅にも適用することができて，このような質量ゼロの極限ではMajoranaの記述による2つのニュートリノ状態 ν_-, ν_+ と，Diracの記述による2つの状態 ν_-, $\bar{\nu}_+$ を実験的に区別することができない．

この等価性はニュートリノの質量がゼロでなくなれば破綻する．P_{R} と P_{L} がもはやヘリシティ射影演算子ではなくなるからである．しかしこのような理論的な予想の違いは，ニュートリノ質量がゼロの極限で消失するものであるし，実際のニュートリノの質量は非常に小さいために，違いを検出することは極めて困難である．今までこの効果が検出されたデータはないが，最も有望と期待される実験は二重 β 崩壊である．次の二重 β 崩壊，

$$(Z, A) \ \rightarrow \ (Z+2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \tag{16.95}$$

はDiracニュートリノでもMajoranaニュートリノでも図16.10(a)の機構によって許容される．しかしニュートリノが生じない次の二重 β 崩壊，

$$(Z, A) \ \rightarrow \ (Z+2, A) + 2e^- \tag{16.96}$$

はDiracニュートリノの相互作用(16.7)の下では，レプトン数の保存を破るので禁じられる．しかし質量のあるMajoranaニュートリノの場合は，この過程が図16.10(b)の機構によって起こり得る．仮に反応(16.96)が観測されたならば，原理的には未知の機構による別の可能性も排除できないにしても，Majoranaニュートリノが存在し

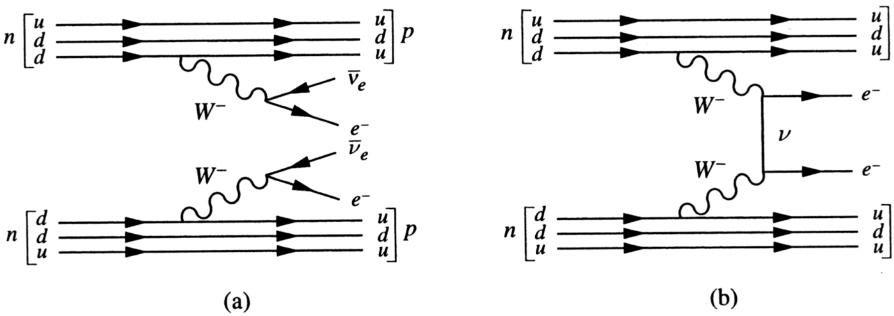


図16.10 (a) Diracニュートリノでも Majoranaニュートリノでも許容される二重 β 崩壊. (b) Majoranaニュートリノだけに許容される二重 β 崩壊.

ていることをかなり強力に支持する根拠となるであろう．これを書いている時点で，ニュートリノを生成しない二重 β 崩壊の確定的な証拠は存在しない．現在までの実験を解釈すると[13]，Majorana電子ニュートリノが仮に存在するならば，その質量の上限は $0.5\ \mathrm{eV}/c^2$ である．本書ではこれ以降もニュートリノを，反ニュートリノが存在する Diracニュートリノとして扱うことにする．

16.8 IVB理論の困難

IVB理論には，成功を収めている部分も少なくないが，深刻な困難もある．たとえば次のような過程，

$$\nu_\mu + e^- \ \to\ \nu_\mu + e^- \tag{16.97}$$

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \ \to\ \bar{\nu}_\mu + e^- \tag{16.98}$$

は如何なる保存則によっても禁じられていないが，この理論で記述することができない．相互作用 (16.7) の下では，過程 (16.98) への最初の寄与は，図16.11 の Feynman グラフになる．このことは，

$$\nu_e + e^- \ \to\ \nu_e + e^- \tag{16.99}$$

や，逆ミュー粒子崩壊，

[13] 二重 β 崩壊の実験に関する簡単な解説は Martin and Shaw (p.271脚註参照), Section 11.6.2 に与えられている.

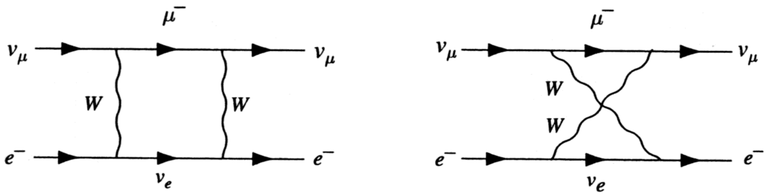


図16.11　$\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$ という過程に対してIVB理論から与えられる最初の寄与.

$$\nu_\mu + e^- \ \to \ \nu_e + \mu^- \tag{16.100}$$

のような過程が，ひとつの W ボゾンの交換による最低次数の図16.3 (p.437) や図16.8 (p.452) によって与えられたことと対照される．この違いはレプトンカレント J_α と $J_\alpha^\dagger$ (式(16.6)) の各項が，常に中性レプトンと荷電レプトンを結びつけるという事実に因っている．たとえば相互作用(16.7) において，ミュー・ニュートリノを消滅させる項は必然的に μ^- を生成するか μ^+ を消滅させる．したがって，式(16.97) に寄与を持つような摂動項には，図16.11 のように少なくとも２回の W ボゾンの交換が必要となる．

我々は既に結合定数 g_W の値が小さいことを見た．したがって，式(16.97) のような 2-ボゾン交換過程による断面積は，式(16.89) のような 1-ボゾン交換過程による断面積よりも充分に小さいと考えられる．残念ながら図16.11 の Feynman グラフから生じるループ積分は発散し，IVB理論は，この後に述べるように繰り込み不可能である．このことはループ積分を含むような寄与を計算する方法がないことを意味している．したがってIVB理論は単なる現象論にすぎない．IVB理論で評価できるのは，ループ積分を含まない最低次の摂動に限られる．

一方で $\nu_\mu - e^-$ 散乱(16.97) の断面積の観測値は，$\bar{\nu}_\mu - e^-$ 散乱(16.98) の断面積の観測値と同等である．このことはIVB相互作用(16.7) が不完全であり，$\nu_\mu - e^-$ 散乱が 1-ボゾン交換過程によって起こるような追加の項が必要であることを示唆している．レプトン数の保存は実験事実として確立しているので，これを保持するのであれば，余分の項は図16.12 のような Feynman ダイヤグラムで表されるべきものと考えられる．すなわち電子-電子カレントとニュートリノ-ニュートリノカレントの間に，ひとつの中性ベクトルボゾン Z^0 が交換される過程である．(中性ベクトルボゾンの吸収もしくは放射を伴うカレントを“中性カレント”と呼ぶ．これは荷電ベクトルボゾンを放射・吸収する“荷電カレント”J_α，$J_\alpha^\dagger$ と対照される．) Z^0 ボゾンの存在と，相互作用における中性カレント項の存在は，電弱標準理論が繰り込み可能な理論

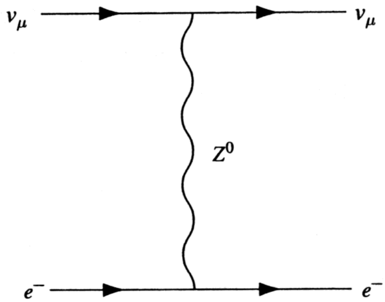


図16.12 IVB理論には含まれない $\nu_\mu + e^- \to \nu_\mu + e^-$ 過程への1-ボゾン交換による寄与.

となるために必要とされる. $\nu_\mu - e^-$ 散乱や $\bar{\nu}_\mu - e^-$ 散乱が実際に観測される前に予言されていたことは, 電弱標準理論の初期の大きな成功のひとつに数えられる.

最後にIVB理論の繰り込み可能性の問題に戻ろう. Wボゾンの伝播関数(16.30)を見てみる.

$$\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\alpha\beta}(k, m_W) = \frac{\mathrm{i}\left(-g_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta / m_W^2\right)}{k^2 - m_W^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{16.30}$$

これは運動量 k が大きいところで定数のように振舞う. したがって図16.11のFeynmanグラフの振幅に含まれるループ積分は2次で発散する.

$$\int^{\Lambda} \frac{\mathrm{d}^4 k}{k^2} \sim \Lambda^2 \tag{16.101}$$

Λ は高エネルギーの切断パラメーターである. より一般的には, さらに複雑な高次グラフにおいて追加されてループを形成するそれぞれの W 伝播関数が Λ^2/m_W^2 のオーダーの因子を生じる. 因子 Λ^2 は純粋な次元の考察から現れる. したがって与えられた過程について, 高次の摂動まで考えるほど, より深刻な発散が現れてくる. これらを相殺するために, 各段階で繰り込み定数を追加していくならば, 結局のところ無数の定数が必要となる. すなわち繰り込み不可能である.

第9章で見たようにQEDでは状況が全く違っていた. 繰り込み定数は3つだけで, それらを電子の質量と電荷に吸収できたので繰り込みが可能であった. このQEDとIVB理論との根本的な違いは, QEDでは基本発散グラフの発散次数が外線数だけに依存し, 結節点(ヴァーテックス)数 n には依らないという点に象徴される (式(9.112)). IVB理論では, n が増えるに従って発散次数も増えてしまう (問題16.3参照). IVB理論における発散の困難は W 伝播関数における $k^\alpha k^\beta / m_W^2$ の項から生じている. この項は光子の伝播

関数 $-\mathrm{i}g^{\alpha\beta}/k^2$ には含まれない．したがって後者は k に関するループ積分において k が大きいところで収束因子として働く．光子伝播関数の場合はゲージ不変性を利用して $k^\alpha k^\beta$ の項を避けることが可能であった．弱い相互作用の理論もゲージ理論の形で定式化することによって，繰り込み可能性を実現できる．

練習問題

16.1 ミュー粒子の崩壊 $\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ において，ミュー粒子の静止系における生成電子エネルギーの最大値が，次式になることを示せ．

$$\frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu}$$

16.2 レプトン化崩壊 $W^+ \to l^+\nu_l$ の頻度(16.80)を導出せよ．

16.3 IVB理論において Feynman振幅の発散次数 K が次のように与えられることを示せ．

$$K = n + 4 - \frac{3}{2}f_\mathrm{e} - 2b_\mathrm{e}$$

ここで f_e (b_e) はフェルミオン外線 (ボゾン外線) の本数，n は結節点の個数を表す．(これに対応する QED の発散次数(9.112)は n に依存しない．)

16.4 偏極しているミュー粒子の微分崩壊頻度が，次式で与えられることを示せ．

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{3}\frac{G^2}{(2\pi)^4}\,\mathrm{d}^3\mathbf{p}\,m_\mu\Big[3m_\mu - 4E + \cos\theta\,(m_\mu - 4E)\Big]$$

$(E, \mathbf{p})$ はミュー粒子の静止系で見た生成電子のエネルギー‐運動量4元ベクトルであり，θ はミューオンのスピンに対する $\mathbf{p}$ の角度である．電子の質量を無視してあるので，上式は崩壊によってエネルギーの高い電子が生成した場合だけに適用できる．$\cos\theta$ の項は，この過程のパリティ非保存の効果にあたる．

16.5 逆ミュー粒子崩壊，

$$\nu_\mu + e^- \;\to\; \nu_e + \mu^- \tag{A}$$

の重心系における微分断面積は，Fermi の点接触型相互作用(16.44)の下で，

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{G^2E^2}{\pi^2}$$

と与えられることを示せ．レプトンの質量はすべて，重心系における入射ニュートリノのエネルギー E に比べて無視できるものと仮定せよ．

また，これに関連した過程，

$$\bar{\nu}_e + e^- \;\to\; \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

の微分断面積が，次式になることを示せ．

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{G^2E^2}{4\pi^2}(1-\cos\theta)^2$$

θ は入射ニュートリノと出射ミュー粒子のなす角度である．第2の反応では，前方 ($\theta = 0$) において断面積がゼロになる．このことをレプトンのヘリシティと点接触型相互作用の性質から直接に導け．また同様の考察によって，逆ミュー粒子崩壊 (A) では前方散乱が除かれないことも示せ．

第 17 章　弱い相互作用のゲージ理論

本章では電磁相互作用を記述する QED からの類推により，弱い相互作用を記述するゲージ理論の定式化を試みる．弱い相互作用においては，電磁カレントの役割をレプトンカレント J_α と $J_\alpha^\dagger$ (式(11.6)) が担い，光子の役割を $W^\pm$ ボゾンが担う．そして，前章の末尾で言及したように，ゲージ不変性の要請から，中性のレプトンカレントと，第 3 の電気的に中性なベクトルボゾンの存在が導かれることを見る予定である．これと同時に自然な形で，電磁相互作用と弱い相互作用の統一が達成される．しかし本章で展開する理論のゲージ不変性から，すべてのレプトンとすべてのベクトルボゾンは質量を持たないことになってしまう．本章の末尾でこの困難について論じるが，その解決方法は次章において与える．

17.1　QED の復習

我々は 11.1 節において QED の相互作用を推定するために，極小(ミニマル)ゲージ原理を利用する方法を論じた．この議論は本章における考察の雛形になるので，読者の便宜のために，ここで簡単に復習しておく．

基本的な考え方として，最初に自由場のラグランジアンを不変に保つような大域的位相変換の組を見出し，それに付随する適切な電荷-電流保存則を導く．これらの変換を，局所的な位相変換 (局所的ゲージ変換) へと一般化して，この局所的変換における理論の不変性を仮定し，そこから相互作用の形を推定する．

12.1 節ではこのような手順で，最初に自由場ラグランジアン，

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x) \tag{17.1}$$

が，大域的な位相変換，

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) \;&\to\; \psi'(x) = \psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \\ \bar{\psi}(x) \;&\to\; \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{17.2}$$

の下で不変であることを見出し，そこから次の電磁カレントが保存することを導いた．

$$s^{\mu}(x) = q\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) \tag{17.3}$$

すなわち，このカレントは連続の方程式 $\partial_{\mu}s^{\mu}(x) = 0$ を満たし，電荷，

$$Q = q\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\psi^{\dagger}(x)\psi(x) \tag{17.4}$$

が保存されることを，式(2.40) のところで論じた.

次の段階として，式(17.2) の変換を，局所的な位相変換の組へと一般化した.

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) \ &\rightarrow\ \psi'(x) = \psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)} \\ \bar{\psi}(x) \ &\rightarrow\ \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}qf(x)} \end{aligned}\right\} \tag{17.5a}$$

$f(x)$ は任意の関数である．これらの変換の下で，自由場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0$ は，

$$\mathcal{L}_0 \ \rightarrow\ \mathcal{L}_0' = \mathcal{L}_0 + q\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\partial_{\mu}f(x) \tag{17.6}$$

のように変更を受けるので，不変性を回復するために，何らかの相互作用項を加えなければならない．相互作用の形を導くために，我々はまず共変微分(11.7) を導入した.

$$D_{\mu}\psi(x) = \left[\partial_{\mu} + \mathrm{i}qA_{\mu}(x)\right]\psi(x) \tag{17.7}$$

ここで電磁場は，通常の方法でゲージ変換をする.

$$A_{\mu}(x) \ \rightarrow\ A_{\mu}'(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}f(x) \tag{17.5b}$$

共変微分の決定的に重要な性質は，式(17.5a) と式(17.5b) を組み合わせたゲージ変換の下で，これが物質場 $\psi(x)$ と同じように変換するということである.

$$D_{\mu}\psi(x) \ \rightarrow\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)}D_{\mu}\psi(x) \tag{17.8}$$

したがって，式(17.1) における通常の微分 $\partial_{\mu}\psi$ を，共変微分(17.7) に置き換えることにより，QED のゲージ不変なラグランジアンが得られる.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(x)\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\right)\psi(x) \\ &= \mathcal{L}_0 - q\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)A_{\mu}(x) \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{I}} \end{aligned} \tag{17.9}$$

式(17.9) に現れた相互作用項は“極小(ミニマル)ゲージ相互作用”と呼ばれる．式(17.9) に対して，更にゲージ不変な項を，対称性を損なわずに加えることも可能ではあるが，16.3.2 項で示したように，そのような項は繰り込み不可能な理論を導いてしまう.

17.2 大域的な位相変換と保存する弱カレント

前節で概説した手続きを応用して，ゲージ理論としての弱い相互作用の理論を構築してみよう．第１段階として，自由レプトン系のラグランジアン密度を不変に保つような大域的な位相変換の組を見出し，式(16.6)の弱カレント $J_\alpha(x)$, $J^\dagger_\alpha(x)$ の保存則が導かれることを確認する必要がある．

手始めとして，すべてのレプトンが質量を持たないことを仮定してみる．本章の末尾において，現実にはゼロでないレプトン質量が現れるという問題に戻る予定である．自由レプトン系のラグランジアン密度は，次式で与えられる．

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{i}\left[\bar{\psi}_l(x)\partial\!\!\!/\psi_l(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}(x)\partial\!\!\!/\psi_{\nu_l}(x)\right] \tag{17.10}$$

これ以降では $l = e, \mu, \tau$ のすべての種類(３世代)のレプトンについて，和を取ることが含意されているものと見なす．

第16章において，レプトンカレント間の弱い相互作用は，左手型のレプトン場だけを含むことを見た(式(16.13)-(16.16))．そこで式(17.10)を左手型の場と右手型の場を用いる形に書き直してみる．任意のDiracスピノル $\psi(x)$ に対して，次のように左手型・右手型の場を定義できる．

$$\left.\begin{aligned} \psi^{\mathrm{L}}(x) &= P_{\mathrm{L}}\psi(x) \\ \psi^{\mathrm{R}}(x) &= P_{\mathrm{R}}\psi(x) \end{aligned}\right\} \equiv \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)\psi(x) \tag{17.11}$$

そして，式(17.10)は次のように書き直される．

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{i}\left[\bar{\psi}^{\mathrm{L}}_l(x)\partial\!\!\!/\psi^{\mathrm{L}}_l(x) + \bar{\psi}^{\mathrm{L}}_{\nu_l}(x)\partial\!\!\!/\psi^{\mathrm{L}}_{\nu_l}(x) + \bar{\psi}^{\mathrm{R}}_l(x)\partial\!\!\!/\psi^{\mathrm{R}}_l(x) + \bar{\psi}^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\partial\!\!\!/\psi^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\right] \tag{17.12}$$

ここで ψ^{L}_l と $\psi^{\mathrm{L}}_{\nu_l}$ を組み合わせて，２成分場を作る．

$$\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{L}}_l(x) = \begin{pmatrix} \psi^{\mathrm{L}}_{\nu_l}(x) \\ \psi^{\mathrm{L}}_l(x) \end{pmatrix} \tag{17.13a}$$

これに随伴する場を，次のように導入する．

$$\bar{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{L}}_l(x) = \left(\bar{\psi}^{\mathrm{L}}_{\nu_l}(x),\ \bar{\psi}^{\mathrm{L}}_l(x)\right) \tag{17.13b}$$

これらの場を用いると，式(17.12)は次のように表される．

$$\mathcal{L}_0 = \mathrm{i}\left[\bar{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{L}}_l(x)\partial\!\!\!/\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{L}}_l(x) + \bar{\psi}^{\mathrm{R}}_l(x)\partial\!\!\!/\psi^{\mathrm{R}}_l(x) + \bar{\psi}^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\partial\!\!\!/\psi^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\right] \tag{17.14}$$

式(17.12)は左手型と右手型の間で対称的であるが，我々は式(17.14)を敢えて非対称な形で書いた．すなわち右手型の2成分場を導入していない．弱い相互作用の左右非対称性が，左手型場と右手型場の異なる変換性という形で記述できることを，これから見る予定である．2成分の左手型場に関しては，双一次形 $\bar{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x)(\cdots)\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)$ を不変に保つような2次元変換の可能性が考えられる．この目的のために，3つの 2×2 エルミート行列を導入する．

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17.15}$$

これらは，次の交換条件を満たす．

$$[\tau_i, \tau_j] = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\tau_k \tag{17.16}$$

ε_{ijk} は完全反対称テンソルである．繰り返された添字 $k\ (=1,2,3)$ などについては，常に和を取るものと見なす．(この τ 行列は Pauli のスピン行列と同じものである．)

演算子，

$$U(\alpha) \equiv \exp\bigl(\mathrm{i}\alpha_j\tau_j/2\bigr) \tag{17.17}$$

は，任意の3つの実数の組 $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ の下でユニタリーである．次の変換の組，

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) &\ \to\ \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}\prime}(x) = U(\alpha)\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \equiv \exp\bigl(\mathrm{i}\alpha_j\tau_j/2\bigr)\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \\ \bar{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x) &\ \to\ \bar{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}\prime}(x) = \bar{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x)U^{\dagger}(\alpha) \equiv \bar{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x)\exp\bigl(-\mathrm{i}\alpha_j\tau_j/2\bigr) \end{aligned}\right\} \tag{17.18a}$$

を考えると，$\mathcal{L}_0$ の式(17.14)における最初の項 $\mathrm{i}\bar{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x)\partial\!\!\!/\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)$ は不変に保たれる．

演算子 $U(\alpha)$ は 2×2 ユニタリー行列であるが，更に $\det U(\alpha) = +1$ の性質を併せ持つ特殊ユニタリー行列 (special unitary matrix) である．したがって，この変換は SU(2) 変換と呼ばれる[1]．式(17.18a)の変換は，1次元の大域的な位相変換(17.2)を一般化した2次元の大域的位相変換と見なすことができる．

左手型2成分レプトン場 $\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)$ の SU(2) 変換に関する性質は，非相対論的な Pauli のスピン理論においてスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を記述する2成分スピノルの性質と全く同じであるし，中性子と陽子を，核子の2つの状態として記述する2成分アイソスピノルの性質

[1] すべての SU(2) 変換の組は SU(2) 群を形成する．群を構成する要素同士が可換であれば，その群は Abel 群と呼ばれ，要素同士が非可換であれば非 Abel 群と呼ばれる．SU(2) 群は，τ 行列が非可換であり，よって演算子(17.17)も非可換なので，非 Abel 群に該当する．“SU(2)”や“非 Abel”などの術語は群論から引用しているが，これ以降の議論において群論の予備知識は必要ではない．

とも同じである．したがって２成分場 $\mathbf{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)$ は弱アイソスピノル (weak isospinor) と呼ばれる．Pauliのスピン理論には，２成分スピノルに加えて，１成分スカラー (たとえば１重項スピン状態)，３成分ベクトル (たとえば３重項状態) なども導入することができ，これらの量の変換性も基本的なスピノル変換の下で表現される．たとえば，変換の下で不変な任意の量はスカラーである．このような概念をすべて，弱アイソスピンにも流用できる．すなわちSU(2)変換の下で，弱アイソスカラー，弱アイソスピノル等々の変換性を持つという観点から，諸量の種類を分別できる．

ここまで左手型のレプトン場を考えてきた．ここで右手型レプトン場それぞれを，弱アイソスカラーとして定義することにする．すなわちこれらは任意のSU(2)変換の下で不変であるものと見なす．

$$\left.\begin{aligned} \psi_l^{\mathrm{R}}(x) \;&\to\; \psi_l^{\mathrm{R}\prime}(x) = \psi_l^{\mathrm{R}}(x), \quad \psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) \;\to\; \psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}\prime}(x) = \psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) \\ \bar{\psi}_l^{\mathrm{R}}(x) \;&\to\; \bar{\psi}_l^{\mathrm{R}\prime}(x) = \bar{\psi}_l^{\mathrm{R}}(x), \quad \bar{\psi}_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) \;\to\; \bar{\psi}_{\nu_l}^{\mathrm{R}\prime}(x) = \bar{\psi}_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) \end{aligned}\right\} \tag{17.18b}$$

こうすると，SU(2)変換(17.18a), (17.18b)の下で，式(17.14)の自由レプトン系ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0$ が不変となることはほとんど自明である．

$\mathcal{L}_0$ の不変性により，レプトンカレント $J_\alpha(x)$ と $J_\alpha^\dagger(x)$ (式(16.6)) の保存が導かれる．無限小の α_j の下では，式(17.18a)が次のように簡約される．

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \;&\to\; \mathbf{\Psi}_l^{\mathrm{L}\prime}(x) = \left(1 + \mathrm{i}\alpha_j\tau_j/2\right)\mathbf{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \\ \overline{\mathbf{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x) \;&\to\; \overline{\mathbf{\Psi}}_l^{\mathrm{L}\prime}(x) = \overline{\mathbf{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x)\left(1 - \mathrm{i}\alpha_j\tau_j/2\right) \end{aligned}\right\} \tag{17.19}$$

右手型場の変換(17.18b)はそのままでよい．式(2.39)のところと類似の議論により，３つの保存するカレントが導かれる．

$$J_i^\alpha(x) = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x)\gamma^\alpha\tau_i\mathbf{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x), \quad i = 1, 2, 3 \tag{17.20}$$

これらは弱アイソスピンカレントと呼ばれる．これらに対応して現れる保存量，

$$I_i^W = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, J_i^0(x) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, \mathbf{\Psi}_l^{\mathrm{L}\dagger}(x)\tau_i\mathbf{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x), \quad i = 1, 2, 3 \tag{17.21}$$

は弱アイソスピン電荷と呼ばれる‡．

IVB理論の構築において導入したレプトンカレント $J^\alpha(x)$ と $J^{\alpha\dagger}(x)$ (式(16.6)) を，保存する弱アイソスピンカレント $J_1^\alpha(x)$ と $J_2^\alpha(x)$ の１次結合で表すことができる．式(17.11)と式(17.15)を用いて次式を得る．

$$\left.\begin{aligned} J^\alpha(x) &= 2\left[J_1^\alpha(x) - \mathrm{i}J_2^\alpha(x)\right] = \bar{\psi}_l(x)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}(x) \\ J^{\alpha\dagger}(x) &= 2\left[J_1^\alpha(x) + \mathrm{i}J_2^\alpha(x)\right] = \bar{\psi}_{\nu_l}(x)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_l(x) \end{aligned}\right\} \tag{17.22}$$

‡(訳註) ${I_i}^W$ はレプトンの全世代 $(e,\nu_e), (\mu,\nu_\mu), (\tau,\nu_\tau)$ の左手型成分の組に関する和の形で定義されているが，通常，強粒子に用いられる I_3 はクォークの第１世代の組 (d,u) だけで定義される．ゲージ理論化して弱い相互作用を考える場合，後者は不変量ではなくなる．

さらに注目すべき点は，上述の議論の下で，弱アイソスピンカレントとして第3のカレント，

$$J_3^{\alpha}(x)=\frac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x)\gamma^{\alpha}\tau_3\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)=\frac{1}{2}\left[\bar{\psi}_{\nu_l}^{\mathrm{L}}(x)\gamma^{\alpha}\psi_{\nu_l}^{\mathrm{L}}(x)-\bar{\psi}_l^{\mathrm{L}}(x)\gamma^{\alpha}\psi_l^{\mathrm{L}}(x)\right] \tag{17.23}$$

も現れることである．このカレント $J_3^{\alpha}(x)$ は“中性カレント”と呼ばれる．その理由は，このカレントが電気的に中性のレプトン同士の組合せか，もしくは電磁カレントのように，荷電レプトン同士の組合せ，

$$s^{\alpha}(x)=-e\bar{\psi}_l(x)\gamma^{\alpha}\psi_l(x) \tag{17.24}$$

によって構成されるからである．これに対して“荷電カレント”である $J^{\alpha}(x)$ と $J^{\alpha\dagger}(x)$ は，電気的に中性なレプトンと，荷電レプトンの組合せによって構成される．定係数因子を除いて，式(17.23)の右辺の最後の項は，電磁カレント(17.24)の一部に相当する．ここにおいて，我々が展開しようとしている理論では，電磁的過程と弱い相互作用の過程が相互に関係を持つという最初の徴を見て取ることができる．

弱超電荷カレント (weak hypercharge current) $J_Y^{\alpha}(x)$ は次のように定義される．

$$\begin{aligned}J_Y^{\alpha}(x)&=s^{\alpha}(x)/e-J_3^{\alpha}(x)\\&=-\frac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x)\gamma^{\alpha}\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)-\bar{\psi}_l^{\mathrm{R}}(x)\gamma^{\alpha}\psi_l^{\mathrm{R}}(x)\end{aligned} \tag{17.25}$$

そして，これに対応する電荷，

$$Y=\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,J_Y^0(x) \tag{17.26}$$

は弱超電荷 (weak hypercharge) と呼ばれる[2)]．式(17.25)を見ると，Y は電荷 Q および弱アイソスピン電荷 I_3^W と次の関係を持つことが分かる．

$$Y=Q/e-I_3^W \tag{17.27}$$

電荷 Q の保存と，弱アイソスピン電荷 I_3^W の保存は，同時に弱超電荷 Y の保存を意味することになる．

次に，異なるレプトンそれぞれの弱アイソスピン電荷 I_3^W と弱超電荷 Y を決めよう．式(17.13a)と式(17.15)から，次式が得られる．

$$\tau_3\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{\nu_l}^{\mathrm{L}}(x)\\\psi_l^{\mathrm{L}}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_{\nu_l}^{\mathrm{L}}(x)\\-\psi_l^{\mathrm{L}}(x)\end{pmatrix}$$

[2)] これらの名は，強粒子の相互作用において見られるこれらに相当する量(超電荷・超電荷カレント)やその関係との形式的な類似性に由来する．(訳註：しかし前頁訳註も参照．)

ここから弱アイソスピン電荷 I_3^W は，左手型 ν_l ニュートリノでは $+\frac{1}{2}$ という値を取り，左手型 l^- レプトンでは $-\frac{1}{2}$ という値を取ることが分かる．これらの結果を，より正当的に導出するには，Dirac 場の展開式(4.38) を式(17.21) に代入すればよい．左手型 l^- レプトンがひとつ存在する状態を $|l^-, \mathrm{L}\rangle$，左手型 ν_l ニュートリノがひとつ存在する状態を $|\nu_l, \mathrm{L}\rangle$ と表記すると，上述のことは次のように表される．

$$I_3^W|l^-, \mathrm{L}\rangle = -\frac{1}{2}|l^-, \mathrm{L}\rangle, \quad I_3^W|\nu_l, \mathrm{L}\rangle = +\frac{1}{2}|\nu_l, \mathrm{L}\rangle \tag{17.28a}$$

右手型レプトン場は弱アイソスカラーなので，右手型 l^- レプトンと，右手型 ν_l ニュートリノの I_3^W の値はゼロになる．

$$I_3^W|l^-, \mathrm{R}\rangle = 0, \quad I_3^W|\nu_l, \mathrm{R}\rangle = 0 \tag{17.28b}$$

異なるレプトンそれぞれに関する弱超電荷 Y の値は，式(17.27) と式(17.28) から導かれる．

$$\begin{aligned} &Y|l^-, \mathrm{L}\rangle = -\frac{1}{2}|l^-, \mathrm{L}\rangle, \quad Y|\nu_l, \mathrm{L}\rangle = -\frac{1}{2}|\nu_l, \mathrm{L}\rangle \\ &Y|l^-, \mathrm{R}\rangle = -|l^-, \mathrm{R}\rangle \\ &Y|\nu_l, \mathrm{R}\rangle = 0 \end{aligned} \tag{17.29}$$

つまり l^- や ν_l の左手型状態では Y が $-\frac{1}{2}$ となり，l^- や ν_l の右手型状態では Y がそれぞれ -1, 0 となる．

上の議論では弱超電荷の保存を Q と I_3^W の保存から式(17.27) を用いて導いた．しかし，この弱超電荷保存を，自由レプトン系のラグランジアン密度(17.14) から直接に，次の同時変換に関する不変性の要請に基づいて導くこともできる．

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \ \to \ \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}\prime}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \\ &\psi_l^{\mathrm{R}}(x) \ \to \ \psi_l^{\mathrm{R}\prime}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\psi_l^{\mathrm{R}}(x) \\ &\psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) \ \to \ \psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}\prime}(x) = \psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) \end{aligned}\right\} \tag{17.30a}$$

随伴する場にも当然，対応する変換が同時に施される．

$$\bar{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x) \ \to \ \bar{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}\prime}(x) = \bar{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta/2}, \quad \text{etc.} \tag{17.30b}$$

β は任意の実数である．式(17.30) の変換を，簡単に次のように書くこともできる．

$$\psi(x) \ \to \ \psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta Y}\psi(x), \qquad \bar{\psi}(x) \ \to \ \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta Y} \tag{17.31}$$

ここで $\psi(x)$ は，$\psi^{\rm L}_{\nu_l}$, $\psi^{\rm L}_{l}$, $\psi^{\rm R}_{\nu_l}$, $\psi^{\rm R}_{l}$ のうちの任意のひとつのレプトン場を表し，Y はその場 $\psi(x)$ によって消滅する粒子の弱超電荷を表す．これらの変換は QED における大域的な位相変換(17.3) と類似の形を持っており，$U = {\rm e}^{{\rm i}\beta Y}$ は絶対値が 1 の複素因子すなわち 1 次元ユニタリー行列にあたるので U(1) 位相変換と呼ばれる．(U(1) 変換ももちろん群を形成する．)

上述の議論を逆転させることも可能である．すなわち自由レプトン系のラグランジアン密度(17.14) に対して不変性の要請を課してゆくと，(i) 大域的SU(2) 変換(17.18) の下で弱アイソスピン電荷 I^W_i の保存が導かれ，(ii) 大域的U(1) 変換(17.30) の下で弱超電荷 Y の保存が導かれる．そこから式(17.27) によって電荷の保存が得られる．

17.3　ゲージ不変な電弱相互作用

次に，上述の SU(2) 変換と U(1) 変換を，大域的な変換から局所的な変換へと一般化する．その方法は QED について 17.1 節で示した手続きとよく似ている．局所化した位相変換の下で不変性を回復するためには，ゲージ場を導入しなければならず，そのとき自動的に相互作用の形も規定されることになる．

まず SU(2) 変換について，大域的な変換(17.18) を，次のような局所的変換に置き換える．

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\Psi}^{\rm L}_l(x)\ \to\ \boldsymbol{\Psi}^{\rm L\prime}_l(x) = \exp\left[{\rm i}g\tau_j\omega_j(x)/2\right]\boldsymbol{\Psi}^{\rm L}_l(x)\\ \bar{\boldsymbol{\Psi}}^{\rm L}_l(x)\ \to\ \bar{\boldsymbol{\Psi}}^{\rm L\prime}_l(x) = \bar{\boldsymbol{\Psi}}^{\rm L}_l(x)\exp\left[-{\rm i}g\tau_j\omega_j(x)/2\right]\\ \psi^{\rm R}_l(x)\ \to\ \psi^{\rm R\prime}_l(x) = \psi^{\rm R}_l(x),\qquad \psi^{\rm R}_{\nu_l}(x)\ \to\ \psi^{\rm R\prime}_{\nu_l}(x) = \psi^{\rm R}_{\nu_l}(x)\\ \bar{\psi}^{\rm R}_l(x)\ \to\ \bar{\psi}^{\rm R\prime}_l(x) = \bar{\psi}^{\rm R}_l(x),\qquad \bar{\psi}^{\rm R}_{\nu_l}(x)\ \to\ \bar{\psi}^{\rm R\prime}_{\nu_l}(x) = \bar{\psi}^{\rm R}_{\nu_l}(x)\end{array}\right\}\qquad(17.32{\rm a})$$

ここで $\omega_j(x)$ $(j = 1, 2, 3)$ は x を引数とする微分可能な任意の 3 つの関数である．g は実定数であり，後から結合定数に同定される．

変換(17.32a) を自由レプトン系のラグランジアン密度(17.14) に適用すると，スピノル項における微分演算子 $\partial\!\!\!/$ は変換指数の関数 $\omega_j(x)$ にも作用する．したがって式(17.14) は，この変換の下で不変ではなく，無限小の $\omega_j(x)$ の下で次のように変換する．

$$\mathcal{L}_0\ \to\ \mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2}g\,\bar{\boldsymbol{\Psi}}^{\rm L}_l(x)\,\tau_j\,\partial\!\!\!/\omega_j(x)\,\boldsymbol{\Psi}^{\rm L}_l(x)\qquad(17.33)$$

QED における微分の置き換え(17.7) からの類推で，式(17.14) における通常の微分 $\partial^\mu\boldsymbol{\Psi}^{\rm L}_l(x)$ を共変微分に置き換えることによって，不変なラグランジアン密度を得ることを考える．

$$\partial^\mu \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \ \rightarrow \ D^\mu \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) = \left[\partial^\mu + \mathrm{i} g \tau_j W_j^\mu(x)/2\right] \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \tag{17.34}$$

そうすると $\mathcal{L}_0$ は次のようになる.

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \mathrm{i}\left[\bar{\boldsymbol{\Psi}}_l^{\mathrm{L}}(x) \not{D} \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) + \bar{\psi}_l^{\mathrm{R}}(x) \not{\partial} \psi_l^{\mathrm{R}}(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) \not{\partial} \bar{\psi}_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x)\right] \tag{17.35}$$

式(17.34)では3つの実数のゲージ場 $W_j^\mu(x)$ を導入した．このことはQEDの場合にゲージ場 $A^\mu(x)$ をひとつだけ導入したことと対照される．ここでは保存されるべき“電荷”I_j^W が3種類あって，ゲージ変換(17.32a)は3つの任意関数 $\omega_j(x)$ を含んでいる．

修正されたラグランジアン密度 $\tilde{\mathcal{L}}_0$ を不変にするには，レプトン場の変換(17.32a)を，ゲージ場の変換，

$$W_j^\mu(x) \ \rightarrow \ W_j^{\mu\prime}(x) = W_j^\mu(x) + \delta W_j^\mu(x)$$

と組み合わせて，共変微分 $D^\mu \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)$ を，場 $\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)$ と同じように変換させなければならない．

$$D^\mu \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \ \rightarrow \ \exp\left[\mathrm{i} g \tau_j \omega_j(x)/2\right] D^\mu \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \tag{17.36}$$

有限の関数 $\omega_j(x)$ を考えると，ゲージ場 $W_j^\mu(x)$ の変換則は大変複雑になる．しかしここでは(連続群の性質により)無限小の $\omega_j(x)$ に関する変換を考察するだけで充分である．無限小変換は次のように表される．

$$\begin{aligned} W_i^\mu(x) \ \rightarrow \ W_i^{\mu\prime}(x) &= W_i^\mu(x) + \delta W_i^\mu(x) \\ &\equiv W_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g\,\varepsilon_{ijk}\,\omega_j(x) W_k^\mu(x) \quad [\text{small } \omega_j(x)] \end{aligned} \tag{17.32b}$$

この結果はQCDにおける変換則(11.26b)とよく似ており，その導出方法も付録11.4節に与えてある式(11.26b)の導出と類似の関係にある．変換則(17.32)の含意を論じる前に，大域的なU(1)変換(17.31)の局所化も考える．これに対応する局所的な変換は，

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) \ &\rightarrow \ \psi'(x) = \exp\left[\mathrm{i} g' Y f(x)\right] \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \ &\rightarrow \ \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) \exp\left[-\mathrm{i} g' Y f(x)\right] \end{aligned}\right\} \tag{17.37a}$$

と表される．g' は実数であるが，後から決定する．$f(x)$ は微分可能な任意関数であり，$Y = -\frac{1}{2}, -1, 0$ はそれぞれ $\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)$, $\psi_l^{\mathrm{R}}(x)$, $\psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x)$ に対応する弱超電荷である．QEDとの類似性は，むしろこちらの方が直接的である．式(17.14)の $\mathcal{L}_0$ を局所的な

位相変換(17.37a)の下で不変なものにするために，通常の微分を共変微分に置き換える．

$$\partial^\mu \psi(x) \ \rightarrow \ D^\mu \psi(x) = \left[\partial^\mu + \mathrm{i}g' Y B^\mu(x)\right]\psi(x) \tag{17.38}$$

ψは4つのレプトン場 ψ_l^{L}, $\psi_{\nu_l}^{\mathrm{L}}$, ψ_l^{R}, $\psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}$ のうちの任意のひとつであり，ここで導入される実ゲージ場 $B^\mu(x)$ は次のように変換する．

$$B^\mu(x) \ \rightarrow \ B^{\mu\prime}(x) = B^\mu(x) - \partial^\mu f(x) \tag{17.37b}$$

我々は，式(17.14)に置き換え(17.34)を施すとSU(2)ゲージ変換(式(17.32a)と式(17.32b))の下で不変なラグランジアン密度が得られ，置き換え(17.38)を施すとU(1)ゲージ変換(式(17.37a)と式(17.37b))の下で不変なラグランジアン密度が得られることを見てきた．式(17.14)において，両方の置き換え(17.34)と(17.38)を同時に施すならば，レプトン系のラグランジアン密度として次式が得られる．

$$\mathcal{L}^{\mathrm{L}} = \mathrm{i}\left[\overline{\boldsymbol{\Psi}}{}_l^{\mathrm{L}}(x)\, \not{D}\, \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) + \bar{\psi}_l^{\mathrm{R}}(x)\, \not{D}\, \psi_l^{\mathrm{R}}(x) + \bar{\psi}_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x)\, \not{D}\, \psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x)\right] \tag{17.39}$$

ここで，共変微分は以下のように定義される．

$$D^\mu \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) = \left[\partial^\mu + \mathrm{i}g\tau_j W_j^\mu(x)/2 - \mathrm{i}g' B^\mu(x)/2\right]\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \tag{17.40a}$$

$$D^\mu \psi_l^{\mathrm{R}}(x) = \left[\partial^\mu - \mathrm{i}g' B^\mu(x)\right]\psi_l^{\mathrm{R}}(x) \tag{17.40b}$$

$$D^\mu \psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) = \partial^\mu \psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) \tag{17.40c}$$

場 $W_i^\mu(x)$ はU(1)ゲージ変換の下で不変であり，$B^\mu(x)$ はSU(2)ゲージ変換の下で不変であるものと定義する．そうすると，ラグランジアン密度(17.39)はSU(2)ゲージ変換とU(1)ゲージ変換の下で不変である．このようなラグランジアン密度を，SU(2)×U(1)ゲージ不変なラグランジアン密度と称する．

ラグランジアン密度(17.39)を，次の形に書くこともできる．

$$\mathcal{L}^{\mathrm{L}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{I}} \tag{17.41}$$

$\mathcal{L}_0$は自由レプトン系のラグランジアン密度(17.14)であり，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}} = -g J_i^\mu(x) W_{i\mu}(x) - g' J_Y^\mu(x) B_\mu(x) \tag{17.42}$$

は弱アイソスピンカレント(式(17.20))および弱超電荷カレント(式(17.25))の，ゲージ場 $W_{i\mu}(x)$ および $B_\mu(x)$ との相互作用を表している．

相互作用密度 $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$を解釈するために，式(17.42)を書き換えてみる．式(17.22)を用いると，弱アイソスピンカレント $J_1^\mu(x)$ と $J_2^\mu(x)$ を荷電レプトンカレント $J^\mu(x)$ と

$J^{\mu\dagger}(x)$ によって表すことができる．そして，$W_{1\mu}(x)$ と $W_{2\mu}(x)$ の代わりに，非エルミートなゲージ場，

$$W_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[W_{1\mu}(x) - \mathrm{i}W_{2\mu}(x)\right] \tag{17.43}$$

と，その共役場 $W^\dagger_\mu(x)$ を導入する．こうすると $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ の初めの２つの項が次のように与えられる．

$$-g\sum_{i=1}^{2} J_i^\mu(x) W_{i\mu}(x) = \frac{-g}{2\sqrt{2}}\left[J^{\mu\dagger}(x) W_\mu(x) + J^\mu(x) W^\dagger_\mu(x)\right] \tag{17.44}$$

$\mathcal{L}_\mathrm{I}$ の残りの２つの項は $W_{3\mu}(x)$ と $B_\mu(x)$ に関する項であるが，これらの１次結合によって，２つのエルミート場 $A_\mu(x)$ と $Z_\mu(x)$ を定義する．

$$\begin{aligned} W_{3\mu}(x) &= \cos\theta_\mathrm{W} Z_\mu(x) + \sin\theta_\mathrm{W} A_\mu(x) \\ B_\mu(x) &= -\sin\theta_\mathrm{W} Z_\mu(x) + \cos\theta_\mathrm{W} A_\mu(x) \end{aligned} \tag{17.45}$$

θ_W は $W_{3\mu}$ と B_μ における Z_μ と A_μ の混合比率を指定する角度変数であり，弱混合角 (もしくは Weinberg 角) として知られる．この混合角を決める問題は，後から考察する．式(17.45) と，

$$J_Y^\mu(x) = s^\mu(x)/e - J_3^\mu(x) \tag{17.25}$$

から，次式が得られる．

$$\begin{aligned} &-gJ_3^\mu(x) W_{3\mu}(x) - g' J_Y^\mu(x) B_\mu(x) \\ &\quad = -\frac{g'}{e} s^\mu(x)\left[-\sin\theta_\mathrm{W} Z_\mu(x) + \cos\theta_\mathrm{W} A_\mu(x)\right] \\ &\qquad - J_3^\mu(x)\Big\{g\left[\cos\theta_\mathrm{W} Z_\mu(x) + \sin\theta_\mathrm{W} A_\mu(x)\right] \\ &\qquad\qquad - g'\left[-\sin\theta_\mathrm{W} Z_\mu(x) + \cos\theta_\mathrm{W} A_\mu(x)\right]\Big\} \end{aligned} \tag{17.46}$$

ここで，式(17.45) によって定義されたゲージ場 $A_\mu(x)$ を電磁場に見立てて，電荷と通常の方法で結合することを要請する．すなわち相互作用ラグランジアン密度において，$-s^\mu(x)A_\mu(x)$ という項を通じて電荷と結合するようにする．これは式(17.46) において，$J_3^\mu(x)A_\mu(x)$ の係数がゼロになり，$s^\mu(x)A_\mu(x)$ の係数が (-1) となるべきことを意味する．すなわち次の関係を設定する．

$$g\sin\theta_\mathrm{W} = g'\cos\theta_\mathrm{W} = e \tag{17.47}$$

式(17.44)と式(17.46)を式(17.42)に代入し，式(17.47)によってg'を消去すると，電弱相互作用のラグランジアン密度の最終的な式が得られる．

$$\mathcal{L}_\mathrm{I} = -s^\mu(x)A_\mu(x) - \frac{g}{2\sqrt{2}}\left[J^{\mu\dagger}(x)W_\mu(x) + J^\mu(x)W_\mu^\dagger(x)\right] - \frac{g}{\cos\theta_\mathrm{W}}\left[J_3^\mu(x) - \sin^2\theta_\mathrm{W}\, s^\mu(x)/e\right]Z_\mu(x) \tag{17.48}$$

このSU(2) × U(1)ゲージ不変な相互作用(17.48)を初めて導いたのはGlashow(グラショウ)であるが(1961年)，レプトンの電磁相互作用と弱い相互作用を記述するラグランジアン密度として，大変有用なものである．結合定数に条件(17.47)を課したことによって得られた第1項は，QEDの相互作用にほかならない．第2項は，

$$g_\mathrm{W} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \tag{17.49}$$

と置くならば，IVB相互作用ラグランジアン密度(16.7)そのものである．したがって，場$W(x)$の量子は$W^\pm$ベクトルボゾンである．式(17.48)の第3項は，中性カレント，

$$J_3^\mu(x) - \sin^2\theta_\mathrm{W}\, s^\mu(x)/e = \frac{1}{4}\bar{\psi}_{\nu_l}(x)\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}(x) - \frac{1}{4}\bar{\psi}_l(x)\gamma^\mu\left[(1-4\sin^2\theta_\mathrm{W}) - \gamma_5\right]\psi_l(x) \tag{17.50}$$

と実ベクトル場$Z_\mu(x)$との結合の項である．この場の量子を16.7節の中性ベクトルボゾンZ^0と解釈するならば，この項は図16.12 (p.461)のような中性カレント過程を司ることになる．第19章に示す予定であるが，現在までに多くの中性カレント過程が観測されており，次のように置くならば，理論と実験結果はよく一致する．

$$\sin^2\theta_\mathrm{W} = 0.23122 \pm 0.00015 \tag{17.51}$$

つまり式(17.50)の後ろの項は，ほとんど純粋な軸性カレントに近い．このような理論と実験の合致は，電磁相互作用と弱い相互作用の統一理論に対する強い支持を与えている．他方，式(17.45)において$\theta_\mathrm{W} = 0$と置くならば(混合がなければ)，弱い相互作用だけのSU(2)ゲージ不変な理論が導かれ，電磁相互作用との結合がなくなってしまう．このような理論は，実験事実によって排除される．

17.4　ゲージボゾンの性質

我々が考察したラグランジアン密度(17.41)は，自由レプトン系と，それらのゲージ場との相互作用を記述する．完全なラグランジアン密度は，レプトンが存在しな

い場合のゲージボゾンを記述する項も含む必要がある．これらの項も SU(2) × U(1) ゲージ不変でなければならない．レプトンに関しては，ここでは一時的にゲージボゾンの質量がゼロであると仮定する．この質量が実際にはゼロでないという問題については次節で言及する．

$B^\mu(x)$ 場に関して，適切な項を構築することは容易である．この場の U(1) ゲージ変換則(17.37b) は，電磁場 $A^\mu(x)$ に関する変換則(17.5b) と同じ形を持つ．したがって電磁場からの類推で，U(1) ゲージ不変な $B^\mu(x)$ 場のラグランジアン密度は，次のように与えられる．

$$-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x) \tag{17.52}$$

ここで，

$$B^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu B^\mu(x) - \partial^\mu B^\nu(x) \tag{17.53}$$

は電磁場テンソル $F^{\mu\nu}(x)$ (式(5.5)) と類似のテンソルである．式(17.52) の SU(2) ゲージ不変性は $B^\mu(x)$ の不変性によって保証される．

ゲージ場 $W_i^\mu(x)$ については，状況はさらに複雑になる．式(17.52) と類似の式は，

$$-\frac{1}{4}F_{i\mu\nu}(x)F_i^{\mu\nu}(x) \tag{17.54}$$

$$F_i^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu W_i^\mu(x) - \partial^\mu W_i^\nu(x) \tag{17.55}$$

と書かれるが，これは式(17.32b) の変換の下で不変ではない．不変性が破れるのは，式(17.32b) の中の，

$$-g\varepsilon_{ijk}\omega_j(x)W_k^\mu(x)$$

という項のためである．不変性を回復するためには，再び付加的な相互作用項を導入する必要がある．式(17.54) において $F_i^{\mu\nu}(x)$ を次式に置き換えれば，目的は達せられる．

$$G_i^{\mu\nu}(x) \equiv F_i^{\mu\nu}(x) + g\varepsilon_{ijk}W_j^\mu(x)W_k^\nu(x) \tag{17.56}$$

すなわち，

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}G_{i\mu\nu}(x)G_i^{\mu\nu}(x) \tag{17.57}$$

は SU(2) ゲージ不変である．式(17.56) と式(17.57) は，QCD においてこれらに対応する式(11.33) と式(11.34) によく似ており，式(11.57) のゲージ不変性の確認は，式

(11.34) に関して付録11.4.2項において与えた方法と同様に行うことができる．$\mathcal{L}_G$ の U(1) 変換の下での不変性は，$W_i^\mu(x)$ の不変性から自明である．

式(17.52) と式(17.57) を組み合わせて式(17.56) を代入すると，ゲージボゾンに関する完全な SU(2) × U(1) 不変なラグランジアン密度が得られる．

$$\mathcal{L}^{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}(x)G_i^{\mu\nu}(x) \tag{17.58a}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}F_{i\mu\nu}(x)F_i^{\mu\nu}(x) \\ &\quad + g\varepsilon_{ijk}W_{i\mu}(x)W_{j\nu}(x)\partial^\mu W_k^\nu(x) \\ &\quad -\frac{1}{4}g^2\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}W_j^\mu(x)W_k^\nu(x)W_{l\mu}(x)W_{m\nu}(x) \end{aligned} \tag{17.58b}$$

式(17.58b) の初めの２つの項は，自由な (相互作用のない) ゲージ場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}_0^{\mathrm{B}}$ を表す．場 $A^\mu(x)$, $Z^\mu(x)$, $W^\mu(x)$ を用いると，$\mathcal{L}_0^{\mathrm{B}}$ は次のように表される．

$$\mathcal{L}_0^{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^{\dagger}(x)F_W^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}(x)Z^{\mu\nu}(x) \tag{17.59}$$

$F^{\mu\nu}(x)$ は電磁場テンソル(5.5) であり，$F_W^{\mu\nu}(x)$ は $W^\mu(x)$ から導かれるテンソル (16.21b) である．同様に，$Z^\mu(x)$ から導かれるテンソル場として，

$$Z^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu Z^\mu(x) - \partial^\mu Z^\nu(x) \tag{17.60}$$

が定義されている．このように式(17.59) は，質量がゼロでスピンが１の γ (光子), $W^\pm$ ボゾン, Z^0 ボゾンから成る自由場ラグランジアン密度を表している．

これに対して式(17.58b) の第３項と第４項は，ゲージボゾン同士の相互作用を表している．摂動論において，これらの項は３線結節点(ヴァーテックス)もしくは４線結節点(ヴァーテックス)を生成する．結節点(ヴァーテックス)の例を図17.1 に示す．これらのボゾン自己相互作用が，この理論において最も注目すべき特徴のひとつである．この性質は弱アイソスピンカレント間の相互作用を媒介する $W_i^\mu(x)$ が，自身も弱アイソスピンベクトルであり，弱アイソスピン電荷を運ぶことから生じている．この状況は QED において電磁相互作用を媒介する光子が電荷を運ばない状況とは対照的である．QED では光子の自己結合項が生じない．

17.5 レプトンとゲージボゾンの質量

ここまですべてのレプトンとゲージボゾンが質量を持たないことを仮定してきた．しかしながら質量ゼロの仮定は，光子だけを除き，非現実的なものである．

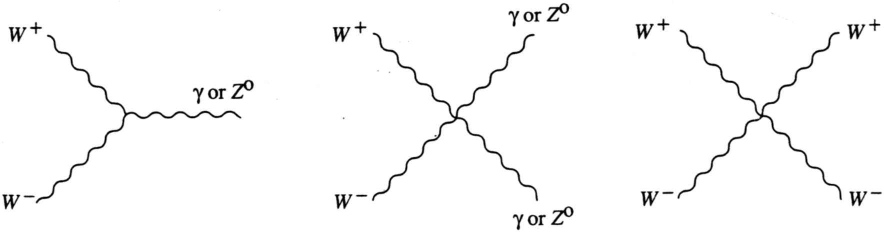


図17.1 式(17.58)のボゾン自己相互作用項から生成する3線結節点と4線結節点の例.

質量を持つ $W^{\pm}$ ボゾンと Z^0 ボゾンを記述するために，ラグランジアン密度(17.59)に質量項,

$$m_W^2 W_\mu^\dagger(x) W^\mu(x) + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu(x) Z^\mu(x) \tag{17.61}$$

を加えることは可能である. $W^{\pm}$ ボゾンについては，この方法でIVB理論のラグランジアン密度(16.21a)が得られる. しかしこのような質量項を加えると，ラグランジアン密度は式(17.32)や式(17.37)の変換の下で不変ではなくなる. すなわち質量項はSU(2)とU(1)のゲージ不変性を壊してしまう. そうすると16.7節で論じたような，質量を持つベクトルボゾンに付随する繰り込みの障害の問題が現れる.

ゼロでないレプトン質量の導入も同様に考えられる. たとえば電子について，ラグランジアン密度に,

$$-m_e \bar{\psi}_e(x) \psi_e(x) \tag{17.62a}$$

という質量項を加えてみる. 残念ながらこの項は，やはり $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ ゲージ不変性を持たない. このことは，式(17.62a)を次のように書き直すと分かる.

$$-m_e \bar{\psi}_e(x) \left[P_\mathrm{R} + P_\mathrm{L}\right] \psi_e(x) = -m_e \left[\bar{\psi}_e^\mathrm{L}(x) \psi_e^\mathrm{R}(x) + \bar{\psi}_e^\mathrm{R}(x) \psi_e^\mathrm{L}(x)\right] \tag{17.62b}$$

ψ_e^R と $\bar{\psi}_e^\mathrm{R}$ は弱アイソスカラーであり，ψ_e^L と $\bar{\psi}_e^\mathrm{L}$ は弱アイソスピノルである.

このように，$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ ゲージ不変性を保持するためには，各レプトンの質量と，$W^{\pm}$, Z^0 ボゾンの質量をすべてゼロに設定する必要がある. 上述のようにして，必要とされるレプトン質量やボゾン質量の項を導入するならば，$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ ゲージ不変性を破らざるをえない. この理論モデルはGlashowモデルとして知られている. $\sin\theta_\mathrm{W}$, m_W, m_Z の値を適切に選べば，このモデルは最低次の摂動計算において実験とよく合う結果を与える. しかしGlashowモデルは繰り込み不可能である. そ

こで我々としては，ラグランジアン密度のゲージ不変性の回復を試みたい．次章において，自発的な対称性の破れという機構によって，ゼロでない質量が導入される方法について学ぶ．この方法の下で，繰り込み可能で実験結果とも整合する理論が得られると同時に，$\sin\theta_{\mathrm{W}}$ を与えることによってゲージボゾンの質量 m_W と m_Z も予言できるようになる．

第 18 章　自発的な対称性の破れ

前章では，ゲージ不変で繰り込み可能な電弱相互作用の統一理論のひとつのモデルを得た．しかしこのモデルでは，すべてのレプトンとゲージボゾンの質量がゼロでなければならない．現実に質量がゼロになっているのは光子だけで，各レプトンも $W^{\pm}$ ボゾンや Z^0 ボゾンもゼロでない質量を持っている．ラグランジアン密度に対して恣意的に質量項を加えると，理論のゲージ不変性と繰り込み可能性が損われる．繰り込み可能な理論を得るためには，ラグランジアン密度のゲージ不変性を保持したままで質量を導入することが不可欠である．本章ではこれを可能にする自発的な対称性の破れ (spontaneous symmetry breaking) と呼ばれる注目すべき機構を調べる．

前章と同様に，我々は大域的な位相不変性から局所的な位相不変性，すなわちゲージ不変性へと議論を進める．18.1節において自発的な対称性の破れの概念を導入し，場の量子論における最も単純な例にあたるGoldstone(ゴールドストーン)モデルを考察する．これは大域的な U(1) 位相変換の下で不変な場の理論のモデルである．Goldstoneモデルは必ず自然界では決して観測されない質量ゼロの (光子以外の) ボゾンを生じる．この好ましからざる性質は“局所的な”位相変換の下で不変な理論，すなわちゲージ理論に対して，自発的な対称性の破れを導入することによって解消する．18.2節では，この機構を U(1) ゲージ変換の下で不変な理論 (Higgs(ヒッグズ)モデル) において調べる．それを前章で展開した SU(2) × U(1) ゲージ不変な電弱理論へと一般化することは容易である (18.3節)．このようにして，ゲージ不変で繰り込み可能であり，かつ各レプトンや $W^{\pm}$ ボゾン，Z^0 ボゾンの質量項を含み，光子だけ質量がゼロになるようなラグランジアン密度が得られる．この理論は電弱標準理論と呼ばれているが，これは1967年にWeinberg(ワインバーグ)によって，またそれとは独立に1968年にSalam(サラム)によって定式化された．その解釈と応用に関する話題は本書の最終章において扱う．

18.1　Goldstoneモデル

自発的な対称性の破れの概念を説明するために，ラグランジアンが，ある対称性を備えている系を考える．すなわちラグランジアン L は，ある対称性変換の下で不変

である[1]．(たとえば L が球対称とするなら, 空間的な回転操作の下で不変である．) この系のエネルギー準位を考えると，２通りの状況があり得る．第１に，着目する準位が縮退していなければ，それに対応するエネルギー固有状態は一意的で，L の対称変換の下で不変である．第２に，着目する準位が縮退していれば，それに対応する一連の固有状態は L の対称変換の下で一般に不変ではないが，それらは相互に１次変換する関係を持つ．系の基底準位を考えてみよう．基底準位が縮退していなければ，基底状態は一意的に決まり，それは L と同じ対称性を持つ．他方，基底準位が縮退していれば，基底状態を表す一意的な状態は存在しない．縮退した状態の中から任意の状態をひとつ選ぶならば，その基底状態は一般に L と同じ対称性を持たない．このようにして非対称な基底状態が現れる機構は“自発的な対称性の破れ”という呼称で知られる．このときの非対称性は，L に不変でない非対称項を加えることによって現れるのではなく，縮退した状態から任意の状態が選ばれることによって現れる．

強磁性は，自発的な対称性の破れの身近な例である．磁性物質において電子スピンを結合する力も，系を記述するハミルトニアンも，本来は回転不変である．しかしながら磁性体の基底状態では，系内のスピンがある決まった向きにそろっており，全体としてゼロでない磁化 $\mathbf{M}$ を生じている．$\mathbf{M}$ の向きは任意であり，この磁化状態は $\mathbf{M}$ が異なる向きを持つ状態との間で明らかに縮退関係にある．$\mathbf{M}$ はどちらを向いていてもよく，$\mathbf{M}$ の向き以外に系のあらゆる性質に全く違いはない．この非対称な基底状態の重要な特徴は，その基底状態から小さな摂動によって生じる励起状態も，この非対称性に支配されることである．

場の理論では，エネルギーが最も低い状態 (基底状態) を真空と呼ぶ．自発的な対称性の破れは，真空状態が一意的でない場合にのみ起こり得る．この驚くべき大胆な概念は Nambu (南部) とその共同研究者たちによって提案された．これは真空状態において，何らかのゼロでない量が存在し，それは系の対称変換の下で不変ではなく，そのような量を用いて“特定の基底状態”が指定され得ることを含意する．ここから先は何らかの量子化された場の真空期待値が，このような役割を持つ量になるものと仮定する．真空状態が Lorentz 変換と並進の下で不変であることを要請するならば，この場はスカラー場 $\phi(x)$ で，その期待値は定数でなければならない．

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = c \neq 0 \tag{18.1}$$

これとは対照的に，任意のスピノル場 $\psi(x)$ や，任意のベクトル場 $V^\mu(x)$ の真空期待値はゼロでなければならない．

---

[1] L の対称性の代わりに，ハミルトニアンの対称性，あるいは運動方程式の対称性に着目してもよい．場の理論ではラグランジアン密度の対称性と見ればよい．

$$\langle 0|\psi(x)|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|V^\mu(x)|0\rangle = 0 \tag{18.2}$$

場が自発的な対称性の破れを起こす最も単純な理論モデルは，Goldstoneモデルである．そのラグランジアン密度は，次のように与えられる．

$$\mathcal{L}(x) = \left[\partial^\mu\phi^*(x)\right]\left[\partial_\mu\phi(x)\right] - \mu^2|\phi(x)|^2 - \lambda|\phi(x)|^4 \tag{18.3}$$

ここで $\phi(x)$ は，複素スカラー場，

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\phi_1(x) + \mathrm{i}\phi_2(x)\right] \tag{18.4}$$

であり，μ^2 と λ は任意の実数パラメーターである．手始めに，まず古典場の理論を考察しよう．すなわち $\phi(x)$ を量子場ではなく古典場と見なし，まだ μ を粒子質量とは考えないことにする．

ラグランジアン密度(18.3)自体は，次の大域的なU(1)位相変換の下で不変である．

$$\phi(x) \;\to\; \phi'(x) = \phi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \qquad \phi^*(x) \;\to\; \phi^{*\prime}(x) = \phi^*(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \tag{18.5}$$

我々はこのモデルにおいて，対称性が自発的に破れ得る状況を見ることにする．

この理論におけるハミルトニアン密度は，式(18.3)と，一般的な関係(2.22), (2.25)から，次のように導かれる．

$$\mathcal{H}(x) = \left[\partial^0\phi^*(x)\right]\left[\partial_0\phi(x)\right] + \left[\nabla\phi^*(x)\right]\cdot\left[\nabla\phi(x)\right] + \mathcal{V}(\phi) \tag{18.6}$$

ここで，

$$\mathcal{V}(\phi) = \mu^2|\phi(x)|^2 + \lambda|\phi(x)|^4 \tag{18.7}$$

は，場のポテンシャルエネルギー密度である．場のエネルギーの下限が $-\infty$ ではなく有限値にとどまるためには $\lambda > 0$ とする必要がある．式(18.6)の第1項と第2項は正定値であり，$\phi(x)$ が定数であればゼロになる．したがって $\mathcal{H}(x)$ の最小値，すなわち場の全エネルギーを最低にする状態は，$\phi(x)$ が $\mathcal{V}(\phi)$ を最低にするような定数値を取る状態として与えられる．μ^2 の符号に依存して2通りの状況が考えられる．

(i) $\mu^2 > 0$．この場合は $\mathcal{V}(\phi)$ の両方の項が正定値になる．このときのポテンシャル面 $\mathcal{V}(\phi)$ の形を，$\phi_1(x)$ と $\phi_2(x)$ の関数として図18.1(a)に示してある．$\mathcal{V}(\phi)$ が最小になる点は，一意的に $\phi(x) = 0$ のところに決まり，自発的な対称性の破れは起こらない．これは我々にとって馴染みやすい状況である．4次の項 $\lambda|\phi(x)|^4$ を省くならば，上の $\mathcal{L}(x)$ と $\mathcal{H}(x)$ の式は，自由な複素Klein-Gordon場を表す式にほかならない．古典的な場 $\phi(x)$ は，安定な平衡位置 $\phi(x) = 0$ の付近で基準振動

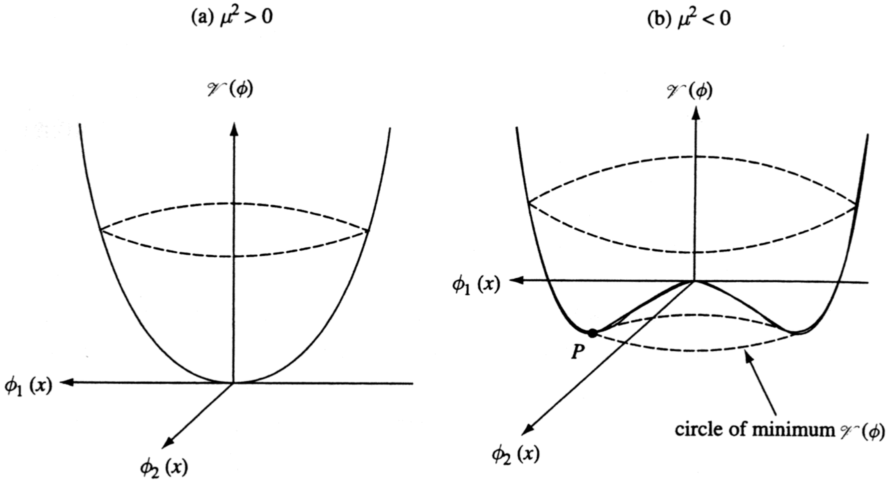


図18.1　ポテンシャルエネルギー密度 $\mathcal{V}(\phi) = \mu^2|\phi(x)|^2 + \lambda|\phi(x)|^4$ (式(18.7). $\lambda > 0$). (b)の場合について，我々は $\mathcal{V}(\phi)$ が最低となる円周において，基底状態 (真空状態) として $(\phi_1, \phi_2) = (v, 0)$ を選ぶ (点 P).

モードを生じる．これに量子化を施すと，スピン0，質量 μ の荷電粒子が現れる(3.2節)．基底状態は一意的で $\langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0$ である．式(18.3), (18.6), (18.7)は自由場の安定な平衡位置 $\phi(x) = 0$ を起点とした $\phi(x)$ と $\phi^*(x)$ による冪(べき)展開と見ることもでき，ここでの扱い方では $\lambda|\phi(x)|^4$ が摂動項にあたる．量子化した理論では，この項が粒子の自己相互作用を表すことになる．

(ii) $\mu^2 < 0$．この場合のポテンシャル面の形は図18.1(b)のようになる．$\mathcal{V}(\phi)$ は $\phi(x) = 0$ において極大値を持ち，$\mathcal{V}(\phi)$ の最低値は，次のような円周全体において実現される．

$$\phi(x) = \phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \tag{18.8}$$

位相角 θ は，複素 ϕ 面内の向きを指定する角度にあたる．この場合は最低エネルギー状態，すなわち真空状態が一意的には決まらない．位相角 θ の任意性は，磁性体における磁化 $\mathbf{M}$ の向きの任意性と似ている．磁性体における磁化と同様に，我々が基底状態を表すために，ひとつの特定の向き θ を選ぶならば，そこで自発的な対称性の破れを起こしていることになる．ラグランジアン密度(18.3)が大域的な位相変換(18.5)の下で不変なので，θ の選び方は全く任意であるが，我々は

$\theta = 0$ を選ぶことにする．こうすると ϕ_0 は実数になる．

$$\phi_0 = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}v \quad (>0) \tag{18.9}$$

ここで，(ii) の場合を念頭に置き，2つの実場 $\sigma(x)$ と $\eta(x)$ を次式によって導入する．

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v + \sigma(x) + \mathrm{i}\eta(x)\right] \tag{18.10}$$

$\sigma(x)$ と $\eta(x)$ は，場 $\phi(x)$ の平衡基底状態 $\phi(x) = \phi_0$ からのずれ (変位) を表す．これらの場を用いると，ラグランジアン密度 (18.3) は次のように表される．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) = &\frac{1}{2}\left[\partial^\mu\sigma(x)\right]\left[\partial_\mu\sigma(x)\right] - \frac{1}{2}\left(2\lambda v^2\right)\sigma^2(x) + \frac{1}{2}\left[\partial^\mu\eta(x)\right]\left[\partial_\mu\eta(x)\right]\\ &- \lambda v\sigma(x)\left[\sigma^2(x) + \eta^2(x)\right] - \frac{1}{4}\lambda\left[\sigma^2(x) + \eta^2(x)\right]^2\end{aligned} \tag{18.11}$$

定数項を省いたが，定数項が結果に影響を及ぼすことはない．

式 (18.3) と式 (18.11) は，異なる変数によって表現した同じラグランジアン密度である．したがって両者は完全に等価であって，物理的に同じ結果を導かなければならない．しかしこの等価性は完全に正確な解に関してのみ成立する．摂動論を利用することを前提に考えると，得られる近似解の性質は全く異なったものになる．$\mu^2 < 0$ の場合には，もはや $\mu^2 > 0$ のときのように式 (18.3), (18.6), (18.7) における4次の項 $\lambda|\phi(x)|^4$ を他の項に対する $\phi(x)$ と $\phi^*(x)$ の摂動項として扱うことはできない．$\mu^2 < 0$ ならば $\phi(x) = 0$ は不安定な状態であり，不安定な解を起点として摂動計算を行うことは不適切である．この手続きが無意味であることは，量子化した非摂動系が虚数質量の粒子系に対応し，有限次数の摂動の下でも適正な記述が得られないことからも明白である．

これに対して式 (18.11) は異なる量子化の手続きを可能とする．ここでは $\sigma(x)$ と $\eta(x)$ について2次の項，すなわち式 (18.11) における第3項までを，自由ラグランジアン密度として扱うことにする．

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2}\left[\partial^\mu\sigma(x)\right]\left[\partial_\mu\sigma(x)\right] - \frac{1}{2}\left(2\lambda v^2\right)\sigma^2(x) + \frac{1}{2}\left[\partial^\mu\eta(x)\right]\left[\partial_\mu\eta(x)\right] \tag{18.12}$$

そして，これら以外の $\sigma(x)$ と $\eta(x)$ に関する3次項や4次項を相互作用と見なす．$\sigma(x)$ と $\eta(x)$ は平衡状態 $\phi(x) = \phi_0$ からの変位を計る変数であり，これらの相互作用項を安定解を起点とする摂動として扱えるものと予想される．

ラグランジアン密度 (18.12) は $\sigma(x)$ と $\eta(x)$ を結合する項を含まない．すなわち $\sigma(x)$ と $\eta(x)$ を，式 (18.12) における直交座標と見ることができる．式 (18.12) と式

(3.4) を比べると，$\sigma(x)$ も $\eta(x)$ も実Klein-Gordon場であることが分かる．量子化を施すと，両方の場がそれぞれスピン0の中性粒子を生じる．σボゾンは質量 $\sqrt{2\lambda v^2}$ (正の実数である) を持ち，ηボゾンは式(18.12) に $\eta^2(x)$ の項がないので質量がゼロである．定義として真空状態 $|0\rangle$ は粒子を含まないので，式(18.9) と式(18.10) により，

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \phi_0 \tag{18.13}$$

である．これが量子論における自発的な対称性の破れの条件を表しており，古典論における式(18.8)や式(18.9) に対応している．

上記のボゾンの質量スペクトルの起源を，図18.1(b) において平衡点 $\phi(x) = \phi_0$ からの小さな変位 $\sigma(x)$ および $\eta(x)$ を考えることによって理解できる．$\sigma(x)$ は放射面 $\phi_2(x) = 0$ の方向の変位を表しており，ポテンシャル $\mathcal{V}(\phi)$ は $\sigma(x)$ に対して2次で増加する．他方 $\eta(x)$ は，最低ポテンシャルの谷間に沿った変位を表し，$\mathcal{V}(\phi)$ は $\eta(x)$ に対して定数なので，これに対応する量子的励起——ηボゾン——は質量を持たない．つまり ηボゾンの質量がゼロになることは，真空状態が縮退していることからの帰結である．このような質量ゼロのボゾンは，自発的に対称性を破った理論においてしばしば現れるものであり，“Goldstoneボゾン”の呼称で知られる．

自然界において Goldstoneボゾンは観測されない．したがって，ゲージ理論 (局所的ゲージ対称性を導入した理論) において自発的に対称性を破っても，Goldstoneボゾンを生成しないという事実に強い関心が持たれる．次節では簡単なモデルによってこのような事情を調べ，その後で前章で見た現実的な SU(2) × U(1) ゲージ理論に戻ることにする．

18.2 Higgsモデル

Goldstoneモデルを，局所的な U(1) ゲージ変換の下で不変になるように一般化することは容易である．前章のようにゲージ場 $A_\mu(x)$ を導入し，Goldstoneラグランジアン密度(18.3) における通常の微分を，共変微分，

$$D_\mu\phi(x) = \left[\partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu(x)\right]\phi(x)$$

に置き換えて，ラグランジアン密度に自由ゲージ場項，

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \tag{18.14}$$

を加える．ここで用いるテンソルは，

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)$$

である．このようにしてラグランジアン密度が得られる．

$$\mathcal{L}(x) = \left[D^\mu \phi(x)\right]^* \left[D_\mu \phi(x)\right] - \mu^2 |\phi(x)|^2 - \lambda |\phi(x)|^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \tag{18.15}$$

これが Higgsモデルの定義となる．式(18.15) は U(1) ゲージ変換の下で不変である．

$$\left.\begin{aligned} \phi(x) &\to \phi'(x) = \phi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qf(x)} \\ \phi^*(x) &\to \phi^{*\prime}(x) = \phi^*(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}qf(x)} \\ A_\mu(x) &\to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \end{aligned}\right\} \tag{18.16}$$

この先の解析手順は Goldstoneモデルのそれと並行する．再び古典論から始めよう．$\lambda > 0$ と置くと，μ^2 の符号によって 2 つの状況があり得る．$\mu^2 > 0$ であれば，最低エネルギー状態において $\phi(x)$ も $A_\mu(x)$ もゼロになり，自発的な対称性の破れは起こらない．

$\mu^2 < 0$ の場合は，真空状態が一意的には決まらず，自発的な対称性の破れが起こる．Lorentz不変性を保証するために，ベクトル場 $A_\mu(x)$ は真空状態においてゼロでなければならないが，最低の $\mathcal{H}(x)$ は，再び $\phi(x)$ が式(18.8) で与えられる円周 ϕ_0 上に位置する状態によって与えられる．Goldstoneモデルと同様に，ϕ_0 として実数値 (18.9) を選び，式(18.10) によって 2 つの実場 $\sigma(x)$ と $\eta(x)$ を定義する．これらの場を用いると，ラグランジアン密度(18.15) は，次のように表される．

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = &\frac{1}{2}\left[\partial^\mu \sigma(x)\right]\left[\partial_\mu \sigma(x)\right] - \frac{1}{2}\left(2\lambda v^2\right)\sigma^2(x) \\ &- \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\partial^\mu \eta(x)\right]\left[\partial_\mu \eta(x)\right] \\ &+ qvA^\mu(x)\,\partial_\mu \eta(x) + [\text{相互作用項}] \end{aligned} \tag{18.17}$$

ここでは [相互作用項] をあらわに示さないが，場の 3 次項や 4 次項から成る．定数項は重要ではないので省いた．

式(18.17) を直接に解釈しようとすると困難に直面する．この式の 1 行目は実Klein-Gordon 場を記述し，量子化すると質量 $\sqrt{2\lambda v^2}$ でスピン 0 の中性粒子を与える．しかし $A^\mu(x)\partial_\mu \eta(x)$ の項は $A^\mu(x)$ と $\eta(x)$ が独立な直交座標でないことを示しており，式(18.17) の 2 行目と 3 行目がそれぞれ質量を持つベクトルボゾンと質量のないスカラーボゾンを記述するとは結論できない[2)]．ラグランジアン密度(18.15) と (18.17)

[2)] この項を相互作用の一部と考えて摂動論で扱うことはしない．式(18.17) の最初の 5 つの項と同じ 2 次の項だからである．

の自由度を数える際にも一見，不都合が生じている．式(18.15) は 4 つの自由度を持つ．2 つは複素スカラー場 $\phi(x)$ によるもので，2 つは実数の質量のないベクトル場 $A^\mu(x)$ による (質量のない光子では独立な偏極状態が 2 つだけあり，第 3 の自由度はゲージ不変性によって消滅する)．式(18.17) では実スカラー場 $\sigma(x)$ と $\eta(x)$ がそれぞれ 1 つの自由度を表し，質量を持つ実ベクトル場 $A^\mu(x)$ は 3 つの自由度を持つ (3 つの独立な偏極状態に対応する)．すなわち書き直されたラグランジアン密度(18.17) は 5 つの自由度を持つように見える．もちろん変数の変更によって系の自由度が変わるはずがない．我々は，ラグランジアン密度(18.17) が現実の粒子に対応しない非物理的な場をひとつ含んでおり，それを消去できるはずだと結論せねばならない．

ゲージ変換を用いて，スカラー場 $\eta(x)$ を式(18.17) から除くことができる．すなわち任意の複素場 $\phi(x)$ に対して，$\phi(x)$ を次の形の実場へ変換するような，式(18.16) の形のゲージ変換を見出せる．

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[v + \sigma(x)\right] \tag{18.18}$$

場が，この形を持つような変換後のゲージを“ユニタリーゲージ”と呼ぶ．(ここでは変換後の場を $\phi'(x)$ とは書かず，改めて $\phi(x)$ と書く．) 式(18.18) を式(18.15) に代入すると，ラグランジアン密度を，次の形に書き直すことができる．

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_\mathrm{I}(x) \tag{18.19a}$$

ここで $\mathcal{L}_0$ は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(x) = &\frac{1}{2}\left[\partial^\mu\sigma(x)\right]\left[\partial_\mu\sigma(x)\right] - \frac{1}{2}\left(2\lambda v^2\right)\sigma^2(x)\\ &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}(qv)^2 A_\mu(x)A^\mu(x)\end{aligned} \tag{18.19b}$$

のように見慣れた 2 次の項だけから成り，次の高次相互作用項 $\mathcal{L}_\mathrm{I}$ と分離している．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mathrm{I}(x) = &-\lambda v\sigma^3(x) - \frac{1}{4}\lambda\sigma^4(x)\\ &+\frac{1}{2}q^2 A_\mu(x)A^\mu(x)\left[2v\sigma(x) + \sigma^2(x)\right]\end{aligned} \tag{18.19c}$$

$\mathcal{L}_0(x)$ は $\sigma(x)$ と $A_\mu(x)$ を結合する項を含んでいない．したがって $\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)$ を摂動論で扱うことにして，$\mathcal{L}_0(x)$ を実 Klein-Gordon 場 $\sigma(x)$ と質量を持つ実ベクトル場 $A_\mu(x)$ の自由場ラグランジアン密度と解釈することができる．$\mathcal{L}_0(x)$ を量子化すると，$\sigma(x)$ は質量 $\sqrt{2\lambda v^2}$ の中性スカラーボゾンとなり，$A_\mu(x)$ は質量 $|qv|$ の中性ベクトルボゾンになる．

これは注目すべき結果である！ 我々は“複素”スカラー場と“質量のない”実ベクトル場を表すラグランジアン密度(18.15)から出発して，“実”スカラー場と“質量を持つ”実ベクトル場のラグランジアン密度(18.19)に到達した．どちらの自由度も4である．元々複素スカラー場 $\phi(x)$ が持っていた2つの自由度のうちのひとつは，ベクトル場が質量を獲得することに伴って $A_\mu(x)$ に第3の自由度として吸収され，もうひとつは実場 $\sigma(x)$ の形で残っている．このようにして元々質量ゼロのベクトルボゾンが，ゲージ不変性を壊さずに質量を獲得する現象は“Higgs機構”と呼ばれ，場 $\sigma(x)$ に付随する質量を持つスピン0のボゾンはHiggsボゾンもしくはHiggsスカラーボゾンと呼ばれる．大域的な位相不変性を自発的に破るGoldstoneモデルでは質量ゼロのGoldstoneボゾンが生成されたが，これとは対照的にHiggs機構はGoldstoneボゾンを生成しない．式(18.17)における場 $\eta(x)$ は，Goldstoneモデルでは質量のないGoldstoneボゾンに関係する部分であるが，ゲージ不変性によってこれが消滅し，$\eta(x)$ が持っていた自由度はベクトル場 $A_\mu(x)$ の第3の自由度になるのである．

Higgs機構は非Abelゲージ理論においても機能する．次節において，この機構を第17章で扱った $\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{U}(1)$ ゲージ理論に適用して，電弱標準理論を導く予定である．しかしその前に，このような理論の繰り込み可能性に簡単に言及しておく．

IVB理論やGlashowモデルとは異なり，ゲージ理論は繰り込み可能であるという大きな利点があり，これによって高次の摂動まで意味のある計算が可能となる．繰り込み可能性の証明は’t Hooft（ト・フーフト），Veltman（ヴェルトマン）その他の人々によって与えられたが，残念ながらその証明は極めて複雑である．ここではHiggsモデルを利用して，背景となる概念を簡単に紹介するにとどめる[3)]．

式(17.19b)の2行目は，質量を持つ中性ベクトルボゾン場のラグランジアン密度と同じであり，次の伝播関数が導かれる．

$$\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(k,m)=\frac{\mathrm{i}\left(-g^{\alpha\beta}+k^\alpha k^\beta/m^2\right)}{k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon} \tag{18.20}$$

ここで $m=|qv|$ である．我々はIVB理論を扱った際に，この伝播関数を見ている(式(16.30)参照)．16.7節では，この伝播関数において $k^\alpha k^\beta/m^2$ がIVB理論を繰り込み不可能なものにすることを指摘した．しかしながら9.8節で見たように，この類の次元による議論(すなわちループ積分における運動量の次数の勘定)は，可能性としての次数の上限を予測するものである．自発的に対称性を破っているゲージ理論では，実際の発散は見かけの次数よりも弱まり，理論が繰り込み可能になる．これは伝播関

3)繰り込み可能性の証明に関心のある読者は，次の文献を参照されたい．E. S. Abers and B. W. Lee, *Gauge Theories, Physics Reports*, 9C, No.1 (1973), J. C. Taylor, *Gauge Theories and Weak Interactions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

数が正確に保存するカレントと結合することや，同じ次数で現れる異なる Feynman グラフの正確な相殺関係による結果である．

Higgsモデルの繰り込み可能性を，ユニタリーゲージを採用しているラグランジアン密度(18.19)から証明するのは難しい．代わりに 't Hooft は QED からの類推を許容する方法を提示した．QED ではゲージ不変なラグランジアン密度，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \tag{18.21}$$

を，次のように置き換えた．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}\left[\partial_\mu A^\mu(x)\right]^2 \tag{18.22}$$

これは，次の Lorentz ゲージを採用するのであれば，式(18.21)と等価である[4]．

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \tag{18.23}$$

そこで，'t Hooft は，ゲージ条件として，

$$\partial_\mu A^\mu(x) - m\eta(x) = 0 \tag{18.24}$$

を設定した('t Hooftゲージ)．$m = |qv|$ であり，$\eta(x)$ は式(18.10)で定義される．'t Hooft は条件(18.24)が成立していれば，ラグランジアン密度(18.17)に，

$$-\frac{1}{2}\left[\partial_\mu A^\mu(x) - m\eta(x)\right]^2 \tag{18.25}$$

という項を加えてもよいことを示した．すなわち修正されたラグランジアン密度と式(18.17)は，観測可能な量に対して同じ予言を与える[5]．式(18.17)に“ゲージ固定項”(18.25)を加えて，修正されたラグランジアン密度を得る．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) = {} & \frac{1}{2}\left[\partial^\mu \sigma(x)\right]\left[\partial_\mu \sigma(x)\right] - \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\sigma^2(x) \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu(x) A^\mu(x) - \frac{1}{2}\left[\partial_\mu A^\mu(x)\right]^2 \\ & + \frac{1}{2}\left[\partial^\mu \eta(x)\right]\left[\partial_\mu \eta(x)\right] - \frac{1}{2}m^2\eta^2(x) \\ & + [\text{相互作用項}]\end{aligned} \tag{18.26}$$

---

[4] 5.1節では，式(18.21)をラグランジアン密度(5.10)で置き換えたのであり，式(18.22)で置き換えていない．しかし，式(5.10)と式(18.22)は4元発散の違いしかないので，互いに等価である．

[5] 式(18.24)はある特別なゲージの選び方を表しているが，'t Hooft は，より一般的に，式(18.24)と類似のゲージの種類全体を定義している．これらは 't Hooft ゲージとして知られる．

ここでも $m = |qv|$ であり，不要な4元発散 $m\partial_\mu[A^\mu(x)\eta(x)]$ を再び省いた．

式(18.26)は，式(18.17)にあった不都合な双一次項 $A^\mu(x)\partial_\mu\eta(x)$ をもはや含んでいないので，$\sigma(x)$, $\eta(x)$, $A_\mu(x)$ を3つの独立な自由場と見て，通常の方法で量子化できる．式(18.26)の1行目と3行目から $\sigma(x)$ と $\eta(x)$ が実Klein-Gordon場であり，量子化すると実Klein-Gordon粒子の運動方程式や伝播関数が得られることが分かる．式(18.26)の2行目は，ユニタリーゲージにおけるベクトル場のラグランジアン密度と $-\frac{1}{2}\left[\partial_\mu A^\mu(x)\right]^2$ の項だけ異なる．式(18.26)から $A^\mu(x)$ の運動方程式として，次式が得られる．

$$\left(\Box + m^2\right)A^\mu(x) = 0 \tag{18.27}$$

式(18.27)はスカラー場のKlein-Gordon方程式と似ている．これを量子化すると，次の伝播関数が得られる[6)]．

$$\mathrm{i}D_{\mathrm{F}}^{\alpha\beta}(k,m) = \frac{-\mathrm{i}g^{\alpha\beta}}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{18.28}$$

ベクトル伝播関数(18.20)に現れる不都合な項 $k^\alpha k^\beta/m^2$ は，式(18.28)には含まれない．k^2 が大きいところでは，伝播関数(18.28)は光子の伝播関数と同様に $1/k^2$ のように振舞い，収束因子として働く．9.8節で行ったような次元の議論によれば，QEDと同様にHiggsモデルも繰り込み可能と結論される．この結論は詳しい解析によって確認されている．

't Hooftゲージを採用すると，ユニタリーゲージにおいて消失していた $\eta(x)$ 場が再び導入される．$\eta(x)$ のFeynman伝播関数は仮想スカラーボゾンの交換と解釈できるけれども，量子化された $\eta(x)$ 場に対応する現実の粒子は存在しない．このような“幽霊粒子(ゴースト)”の性質は，QEDにおける縦波光子やスカラー光子の性質と似ている．これらもやはり現実の粒子としては存在しないが，光子の伝播関数に対して，中間状態の仮想量子として寄与を持つ．$\eta(x)$ 場の詳細な性質は複雑であり，もちろんゲージに依存する．しかしながら，あらゆる観測可能量はゲージ不変である．この状況もQEDの状況とよく似ている．

18.3 電弱標準理論

前章では，質量のないレプトンと質量のないゲージボゾン($W^\pm$ ボゾン，Z^0 ボゾン，および光子)を想定した電磁相互作用と弱い相互作用の統一理論モデルを考察した．

---

6) 式(18.28)の具体的な導出は C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980, Section 3-2-3 に与えられている．

このモデルのラグランジアン密度は,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\mathrm{L}} + \mathcal{L}^{\mathrm{B}} \tag{18.29}$$

と表される. $\mathcal{L}^{\mathrm{L}}$ はレプトン系のラグランジアン密度(17.39), $\mathcal{L}^{\mathrm{B}}$ はゲージボゾンのラグランジアン密度(17.28)である. ラグランジアン密度(18.29)は, SU(2) × U(1)ゲージ変換 (17.32a), (17.32b), (17.37a), (17.37b)の下で正確に不変である. ここで, このモデルに対して Higgs機構を適用してゼロでない質量を持つ $W^{\pm}$ ボゾンと Z^0 ボゾンを生成する方法を示し, 更にレプトンの質量を導入する方法も見ることにする. このようにして最後に Weinberg と Salam による電弱標準理論に到達する.

必要とされる形式は, Higgsモデルを直接的に拡張したものである. ゲージ不変性を自発的に破るために再び, "Higgs場" すなわちゼロでない真空期待値を持ち, ゲージ変換の下で不変でないスカラー場を導入する必要がある.

我々はここで SU(2)対称性を破りたいので, 単一のスカラー場ではなく, 複数の成分を持ち, ゼロでないアイソスピンを持つ場を導入する必要がある. 最も単純な可能性としては, 弱アイソスピン２重項が考えられる.

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \phi_a(x) \\ \phi_b(x) \end{pmatrix} \tag{18.30}$$

$\phi_a(x)$ と $\phi_b(x)$ は Lorentz変換の下では不変なスカラー場である.

$\mathbf{\Phi}(x)$ の SU(2) × U(1) ゲージ変換の下での変換則は, もちろんアイソスピン２重項 $\mathbf{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x)$ のそれと同じである. 後者の変換は, 式(17.32a)と式(17.37a)に与えてある. 同様に $\mathbf{\Phi}(x)$ は SU(2)変換の下で次のように変換する.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(x) \;&\rightarrow\; \mathbf{\Phi}'(x) = \exp\left[ig\tau_j\omega_j(x)/2\right]\mathbf{\Phi}(x) \\ \mathbf{\Phi}^{\dagger}(x) \;&\rightarrow\; \mathbf{\Phi}^{\dagger\prime}(x) = \mathbf{\Phi}^{\dagger}(x)\exp\left[-ig\tau_j\omega_j(x)/2\right] \end{aligned}\right\} \tag{18.31}$$

そして, U(1)弱超電荷変換は, 次のようになされる.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Phi}(x) \;&\rightarrow\; \mathbf{\Phi}'(x) = \exp\left[ig'Yf(x)\right]\mathbf{\Phi}(x) \\ \mathbf{\Phi}^{\dagger}(x) \;&\rightarrow\; \mathbf{\Phi}^{\dagger\prime}(x) = \mathbf{\Phi}^{\dagger}(x)\exp\left[-ig'Yf(x)\right] \end{aligned}\right\} \tag{18.32}$$

Y は, 場 $\mathbf{\Phi}(x)$ の弱超電荷である. この値はすぐ後で決める. (これに対応する大域的な位相変換は, 式(18.31)と式(18.32)において $g\omega_j(x) \rightarrow \alpha_j$, $g'f(x) \rightarrow \beta$ という置き換えを施すことで得られる. α_j と β は実定数である. 式(17.18a), 式(17.31)と比較せよ.)

ここでラグランジアン密度(18.29)を一般化して, SU(2) × U(1)ゲージ不変性を維持しながら Higgs場 $\mathbf{\Phi}(x)$ およびそのゲージボゾン場との相互作用を含めることを

考える．式(18.29)の2つの項は，既にゲージ不変性を備えている．この性質を明確に保って一般化したラグランジアン密度が，次のように与えられる．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\mathrm{L}} + \mathcal{L}^{\mathrm{B}} + \mathcal{L}^{\mathrm{H}} \tag{18.33}$$

$$\mathcal{L}^{\mathrm{H}}(x) = \left[D^{\mu}\mathbf{\Phi}(x)\right]^{\dagger}\left[D_{\mu}\mathbf{\Phi}(x)\right] - \mu^{2}\mathbf{\Phi}^{\dagger}(x)\mathbf{\Phi}(x) - \lambda\left[\mathbf{\Phi}^{\dagger}(x)\mathbf{\Phi}(x)\right]^{2} \tag{18.34}$$

ここで共変微分 $D^{\mu}\mathbf{\Phi}(x)$ は，次のように定義される．

$$D^{\mu}\mathbf{\Phi}(x) = \left[\partial^{\mu} + \mathrm{i}g\tau_{j}W_{j}^{\mu}(x)/2 + \mathrm{i}g'YB^{\mu}(x)\right]\mathbf{\Phi}(x) \tag{18.35}$$

これは超電荷 $-\frac{1}{2}$ を持つ $\mathbf{\Psi}_{l}^{\mathrm{L}}(x)$ の共変微分(17.40a)と類似関係にある．

式(18.33)における $\mathcal{L}^{\mathrm{B}} + \mathcal{L}^{\mathrm{H}}$ はHiggsモデルのラグランジアン密度(18.15)を直接に一般化したものにあたり，これ以降の解析もHiggsモデルの解析とよく似ている．$\lambda > 0$ で $\mu^{2} < 0$ の場合，古典的なエネルギー密度が最低値を取るのは，Higgs場が次のように与えられる定数となり，他のすべての場がゼロのときである．

$$\mathbf{\Phi}(x) = \mathbf{\Phi}_{0} = \begin{pmatrix} \phi_{a}^{0} \\ \phi_{b}^{0} \end{pmatrix} \tag{18.36}$$

$$\mathbf{\Phi}_{0}^{\dagger}\mathbf{\Phi}_{0} = |\phi_{a}^{0}|^{2} + |\phi_{b}^{0}|^{2} = \frac{-\mu^{2}}{2\lambda} \tag{18.37}$$

$\mathbf{\Phi}_{0}$ を決めて，式(18.37)の条件下で特定の基底状態を選ぶと，それが自発的な対称性の破れとなる．一般性を損わずに，次のように基底状態を選ぶことが可能である．

$$\mathbf{\Phi}_{0} = \begin{pmatrix} \phi_{a}^{0} \\ \phi_{b}^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{18.38}$$

$$v = \left(\frac{-\mu^{2}}{\lambda}\right)^{1/2} \quad (> 0) \tag{18.39}$$

他の可能な任意の $\mathbf{\Phi}_{0}$ の値を選んだとしても，それは式(18.38)の値と大域的な位相変換の下で等価的な関係を持っている．

Higgs場の真空基底状態(18.38)は，一般に $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ ゲージ変換の下で不変ではない．しかしこの基底状態は，光子の質量がゼロで，かつ電荷が保存することを保証するためにU(1)電磁ゲージ変換の下では不変でなければならない．もしHiggs場に対して弱超電荷 $Y = \frac{1}{2}$ を充てるならば，式(17.27)によりHiggs場の下側の成分 $\phi_{b}(x)$ が電気的に中性でなければならず，そうすると自発的な対称性の破れは真空場(18.38)の電気的に中性な成分だけに起こるので，電荷保存が正確に保持される．式(18.16)と式(17.27)からHiggs場の電磁的ゲージ変換は次のように与えられることが分かる．

$$\mathbf{\Phi}(x) \ \rightarrow \ \mathbf{\Phi}'(x) = \exp\left[-\mathrm{i}\left(Y + I_{3}^{W}\right)ef(x)\right]\mathbf{\Phi}(x) \tag{18.40}$$

この変換を真空場(18.38)に施すと，

$$\mathbf{\Phi}_0 \;\rightarrow\; \mathbf{\Phi}'_0 = \mathbf{\Phi}_0 \tag{18.41}$$

となる．すなわち真空場は電磁的ゲージ変換の下で不変である．

任意の Higgs場 $\mathbf{\Phi}(x)$ を，真空場 $\mathbf{\Phi}_0$からのずれ(変位)の変数を導入して，次のように表現する．

$$\mathbf{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \eta_1(x) + \mathrm{i}\eta_2(x) \\ v + \sigma(x) + \mathrm{i}\eta_3(x) \end{pmatrix} \tag{18.42}$$

この式に基づき，式(18.34)のラグランジアン密度 $\mathcal{L}^{\mathrm{H}}$を4つの実場$\sigma(x)$と$\eta_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$によって表すことができる．その解釈と，これらの場の量子化に際して Higgsモデルと同様の困難に直面する．この困難を解消して解析を進める方法も，Higgsモデルの場合とよく似ている．我々が特定のゲージとしてユニタリーゲージを選べば解釈が簡単になる．$\eta_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$は非物理的な場であり，ユニタリーゲージを選ぶと，これらの場が消失すると同時に$W^{\pm}$ボゾンとZ^0ボゾンが質量を獲得する．電磁的なゲージ対称性は自発的な破れを起こしていないので，光子は依然として質量を持たない．このことは非物理的な場$\eta_i(x)$が3つしか現れないという事実にも反映している．$\eta_i(x)$の消失とは対照的に，場$\sigma(x)$はユニタリーゲージにおいても残り，質量を持ち電気的に中性なスピン0の粒子(Higgsスカラーボゾン)を生じる．

ゼロでないレプトン質量を得るためには，ラグランジアン密度(18.33)に対して，適切な項$\mathcal{L}^{\mathrm{LH}}$を加える必要がある．

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\mathrm{L}} + \mathcal{L}^{\mathrm{B}} + \mathcal{L}^{\mathrm{H}} + \mathcal{L}^{\mathrm{LH}} \tag{18.43}$$

我々はレプトンと Higgs場を，次のラグランジアン密度で記述される湯川型相互作用を通じて結合させる[7]．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{LH}}(x) = &-g_l\left[\bar{\mathbf{\Psi}}^{\mathrm{L}}_l(x)\,\psi^{\mathrm{R}}_l(x)\,\mathbf{\Phi}(x) + \mathbf{\Phi}^{\dagger}(x)\,\bar{\psi}^{\mathrm{R}}_l(x)\,\mathbf{\Psi}^{\mathrm{L}}_l(x)\right] \\ &-g_{\nu_l}\left[\bar{\mathbf{\Psi}}^{\mathrm{L}}_l(x)\,\psi^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\,\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x) + \widetilde{\mathbf{\Phi}}^{\dagger}(x)\,\bar{\psi}^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\,\mathbf{\Psi}^{\mathrm{L}}_l(x)\right]\end{aligned} \tag{18.44}$$

g_lとg_{ν_l}は無次元の結合定数である．上式では$l = e, \mu, \tau$の和が含意されている．$\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x)$は次のように定義される．

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x) = -\mathrm{i}\left[\mathbf{\Phi}^{\dagger}(x)\,\tau_2\right]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \phi^*_b(x) \\ -\phi^*_a(x) \end{pmatrix} \tag{18.45}$$

7) スピノル場$\psi(x)$とスカラー場$\phi(x)$を用いて$\bar{\psi}(x)\,\phi(x)\,\psi(x)$の形で与えられる項を湯川型相互作用(Yukawa interaction)もしくは湯川型結合(Yukawa coupling)と呼ぶ．

τ_2 は Pauli 行列であり (式 (17.15))，T は転置を表す.

湯川型相互作用のラグランジアン密度 $\mathcal{L}^{\rm LH}$ が SU(2) × U(1) ゲージ変換の下で不変であることを確認しよう．式(18.44) の 1 行目の不変性はレプトン場の変換則(17.32a), (17.37a) および Higgs 場の変換則(18.31), (18.32) から導かれる．式(18.44) の 2 行目の不変性を調べるには $\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x)$ の変換性を知る必要がある．U(1) 変換の下では，式(18.32) と式(18.45) により，

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x) \;\to\; \widetilde{\mathbf{\Phi}}'(x) = \exp\left[-\mathrm{i}g' f(x)/2\right]\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x) \tag{18.46}$$

となる．SU(2) 変換の下で $\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x)$ が $\mathbf{\Phi}(x)$ と正確に同じ変換性を持つことを以下に示そう．そうすれば，この $\widetilde{\mathbf{\Phi}}$ とレプトン場の変換性により，式(18.44) の 2 行目の SU(2) × U(1) ゲージ不変性が導かれる.

$\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x)$ の SU(2) 変換性を導くには，無限小変換を考えれば充分である．このために，式(18.31) から次式を得る.

$$\mathbf{\Phi}(x) \;\to\; \mathbf{\Phi}(x) + \delta\mathbf{\Phi}(x) = \left[1 + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\,g\,\tau_j\omega_j(x) + \ldots\right]\mathbf{\Phi}(x)$$

すなわち，

$$\delta\mathbf{\Phi}(x) = \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\,g\,\tau_j\omega_j(x)\,\mathbf{\Phi}(x) \tag{18.47}$$

である．したがって，

$$\delta\mathbf{\Phi}^\dagger(x) = -\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\,g\omega_j(x)\,\mathbf{\Phi}^\dagger(x)\,\tau_j$$

となり，式(18.45) から次式が得られる.

$$\delta\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x) = -\mathrm{i}\left[\delta\mathbf{\Phi}^\dagger(x)\,\tau_2\right]^{\rm T} = -\mathrm{i}\left[-\mathrm{i}\,\frac{1}{2}\,g\omega_j(x)\,\mathbf{\Phi}^\dagger(x)\,\tau_j\tau_2\right]^{\rm T} \tag{18.48}$$

Pauli 行列(17.15) ついて $\tau_j\tau_2 = -\tau_2\tau_j^{\rm T}$ が成立する．これを式(18.48) に代入すると，次のように簡単になる.

$$\delta\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x) = \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\,g\omega_j(x)\,\tau_j\left[-\mathrm{i}\mathbf{\Phi}^\dagger(x)\,\tau_2\right]^{\rm T} = \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\,g\omega_j(x)\,\tau_j\,\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x) \tag{18.49}$$

式(18.49) と式(18.47) を比べると，SU(2) 変換の下で $\widetilde{\mathbf{\Phi}}(x)$ と $\mathbf{\Phi}(x)$ が同じように変換することが分かる.

次章において，電弱理論のラグランジアン密度をユニタリーゲージへと変換して，式(18.44) の項がレプトンと Higgs ボゾンの相互作用を生じるだけでなく，ゼロでないレプトン質量を生成することを見る予定である．Weinberg と Salam は $g_{\nu_l} = 0$

と置いて，ニュートリノの質量をゼロに設定した．式(18.44) の２行目はニュートリノにゼロでない質量を導入する最も簡単な方法を表しているが，これは 16.7.1 項で論じたニュートリノ振動と呼ばれる微妙な効果を扱えない．これを考慮するには (問題 19.5 参照)，式(18.44) の２行目を次のように置き換えなければならない．

$$-G_{ll'}\,\overline{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{L}}_{l'}(x)\,\psi^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\,\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(x) - G^{*}_{ll'}\,\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\dagger}(x)\,\bar{\psi}^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\,\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{L}}_{l'}(x) \tag{18.44a}$$

G はエルミート行列(16.101b) である．

しかしながら議論を簡単にするために，我々は“標準模型”(standard model) として，簡単な形(18.44) を採用する．通常の応用ではニュートリノの質量がゼロの極限を想定することが多いので，式(18.44) の２行目や式(18.44a) の寄与は消失するものと見なしてよい．

本書ではレプトン間の電弱相互作用に議論を限定するが，クォークやその複合系である強粒子（ハドロン）までを含むように理論を拡張して，半レプトン過程まで扱えるようにすることも容易である．実際，この理論の拡張は，ラグランジアン密度(18.44) のゲージ不変性と同様に，理論の繰り込み可能性のためにも必要である．その証明は，次章で我々が採用するユニタリーゲージではなく，やはり 18.2 節で Higgs モデルについて言及したように，'t Hooft ゲージに頼らなければならない[8)]．

ここまでで，純粋なレプトン的過程を扱うための電弱標準理論の基礎方程式の導出が完了したことになる．これらの式を以下にまとめて，本章を終えることにする．

ラグランジアン密度(18.43) は，式(17.39), (17.58), (18.34), (18.44) により，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}^{\mathrm{L}}(x) + \mathcal{L}^{\mathrm{B}}(x) + \mathcal{L}^{\mathrm{H}}(x) + \mathcal{L}^{\mathrm{LH}}(x) \\
&= \mathrm{i}\big[\overline{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{L}}_{l}(x)\,\not{D}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{L}}_{l}(x) + \bar{\psi}^{\mathrm{R}}_{l}(x)\,\not{D}\psi^{\mathrm{R}}_{l}(x) + \bar{\psi}^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\,\not{D}\psi^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\big] \\
&\quad + \Big[-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}(x)B^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}G_{i\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}_{i}(x)\Big] \\
&\quad + \Big\{\big[D^{\mu}\boldsymbol{\Phi}(x)\big]^{\dagger}\big[D_{\mu}\boldsymbol{\Phi}(x)\big] - \mu^2\boldsymbol{\Phi}^{\dagger}(x)\,\boldsymbol{\Phi}(x) - \lambda\big[\boldsymbol{\Phi}^{\dagger}(x)\,\boldsymbol{\Phi}(x)\big]^2\Big\} \\
&\quad + \Big\{-g_l\,\big[\overline{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{L}}_{l}(x)\,\psi^{\mathrm{R}}_{l}(x)\,\boldsymbol{\Phi}(x) + \boldsymbol{\Phi}^{\dagger}(x)\,\bar{\psi}^{\mathrm{R}}_{l}(x)\,\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{L}}_{l}(x)\big] \\
&\qquad - g_{\nu_l}\big[\overline{\boldsymbol{\Psi}}^{\mathrm{L}}_{l}(x)\,\psi^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\,\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(x) + \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}^{\dagger}(x)\,\bar{\psi}^{\mathrm{R}}_{\nu_l}(x)\,\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{L}}_{l}(x)\big]\Big\}
\end{aligned} \tag{18.50}$$

$B^{\mu\nu}(x)$ と $G^{\mu\nu}_{i}(x)$ は，式(17.53), (17.56), (17.55) で次のように定義されている．

---

8) クォークを含めるための理論の拡張については D. Bailin, *Weak Interactions*, 2nd edn, Adam Hilger, Bristol, 1982, Section 6.5 を参照．繰り込み可能性に関する完全な議論については Abers and Lee や J. C. Taylor (p.489脚註) を参照されたい．

$$B^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu B^\mu(x) - \partial^\mu B^\nu(x) \tag{18.51}$$

$$G_i^{\mu\nu}(x) \equiv F_i^{\mu\nu}(x) + g\varepsilon_{ijk}W_j^\mu(x)W_k^\nu(x) \tag{18.52}$$

$$F_i^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu W_i^\mu(x) - \partial^\mu W_i^\nu(x) \tag{18.53}$$

式(18.50)における共変微分は，式(17.40), (18.35)で定義されている．

$$D^\mu \boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) = \left[\partial^\mu + \mathrm{i}g\tau_j W_j^\mu(x)/2 - \mathrm{i}g' B^\mu(x)/2\right]\boldsymbol{\Psi}_l^{\mathrm{L}}(x) \tag{18.54}$$

$$D^\mu \psi_l^{\mathrm{R}}(x) = \left[\partial^\mu - \mathrm{i}g' B^\mu(x)\right]\psi_l^{\mathrm{R}}(x) \tag{18.55}$$

$$D^\mu \psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) = \partial^\mu \psi_{\nu_l}^{\mathrm{R}}(x) \tag{18.56}$$

$$D^\mu \boldsymbol{\Phi}(x) = \left[\partial^\mu + \mathrm{i}g\tau_j W_j^\mu(x)/2 + \mathrm{i}g' B^\mu(x)/2\right]\boldsymbol{\Phi}(x) \tag{18.57}$$

ラグランジアン密度(18.50)はSU(2) × U(1)ゲージ変換の下で不変である．しかしながら $\mathcal{L}^{\mathrm{H}} + \mathcal{L}^{\mathrm{B}}$ という項はHiggsモデルのラグランジアン密度(18.15)を直接に一般化したものにあたり，$\lambda > 0$ かつ $\mu^2 < 0$ であればSU(2) × U(1)ゲージ対称性は自発的に破れる．量子化した理論において，Higgs場の真空期待値，

$$\langle 0|\boldsymbol{\Phi}(x)|0\rangle = \boldsymbol{\Phi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{18.58}$$

$$v = \left(-\mu^2/\lambda\right)^{1/2} \quad (> 0) \tag{18.59}$$

は一般にSU(2) × U(1)ゲージ変換の下で不変ではない．しかしながらこれは電磁的ゲージ変換(全体としてのSU(2) × U(1)の中に含まれている)の下では不変である．したがって光子の質量はゼロであり，電荷は保存する．

第 19 章　電弱標準理論

前章で我々は電弱理論の基礎方程式を導出した．本章ではその物理的な解釈と応用について考察しよう．19.1節において理論をユニタリーゲージへと変換するが，これによって物理的な解釈が促される．このゲージでラグランジアン密度を表すと，光子，荷電レプトン，中性レプトン，$W^{\pm}$ボゾン，Z^0ボゾン，およびHiggsボゾンから成る系の記述になることを明確に理解できる．光子を除くすべての粒子が質量を獲得することを確認し，理論の基礎パラメーターからこれらの質量を表す式を得る予定である．19.2節において電弱理論に対するFeynman規則を導くが，これはQEDに対する規則の自然な拡張になっている．

その後の２つの節において，いくつかの応用例を考察する．電弱理論は繰り込み可能であり，すべての摂動次数まで計算を行うことが可能である．このことにより，理論の検証のために，様々の豊富な現象に基づいて，高精度の実験結果と正確な理論計算を照合することが可能となるが，輻射補正は特に重要である．輻射補正の数値検証には入念な計算が必要であるが，そのためにはユニタリーゲージよりも'tHooftゲージを採用する方が適切である．本書では最低次の計算だけを扱うことにする[1)]．19.3節ではニュートリノ-電子散乱を考察する．この過程は歴史的に，弱混合角θ_{W}を実験的に決定し，$W^{\pm}$ボゾンとZ^0ボゾンの質量の予測を導くために利用された．19.4節ではいくつかの電子-陽電子消滅過程を，順次，高いエネルギーを想定して論じてゆく．これらの実験は，最も洗練された電弱理論の検証手段を与えるとともに，高エネルギーにおいて電弱統一の挙動を示すものにもなる．

本章の最後の節では，この理論において未解決の最重要問題を論じる．すなわちHiggs粒子のミステリーである．Higgs粒子の存在は，理論を繰り込み可能にするために不可欠であるが，今のところ発見されていない．Higgs粒子の相互作用の性質を調べることによって，結局，これが未だ発見されていないことに驚く必要はないこと

[1)]半レプトン的過程を含む，更なる応用に関しては，次に挙げる文献を参照されたい．D. Bailin, *Weak Interactions*, 2nd end. A. Hilger, Bristol, 1982 ; S. M. Bilenky, *Introduction to the Physics of Weak Interactions*, Pergamon, Oxford, 1982 ; E. Leader and E. Predazzi, *An Introduction to Gauge Theories and the New Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

を示し，近い将来に，どのような実験によって発見される可能性が高いかを論じることにする．

19.1 ユニタリーゲージにおけるラグランジアン密度

前章において，任意のゲージにおける Higgs場 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ を，次のように書いた．

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \eta_1(x) + \mathrm{i}\eta_2(x) \\ v + \sigma(x) + \mathrm{i}\eta_3(x) \end{pmatrix} \tag{18.42}$$

この弱アイソスピノルを，次のように場 $\eta_i(x)$ を含まない形，

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix} \tag{19.1}$$

に変換することが常に可能である．式(18.42)および式(19.1)は，Higgsモデルにおける式(18.10)および式(18.18)と類似関係にあり，Higgs場が式(19.1)の形で表されるようなゲージを，ここでもユニタリーゲージと称する．式(18.42)を式(19.1)に変換するゲージ変換は，まず弱アイソスピノル(18.42)を“下向き”の弱アイソスピノルに変換するSU(2)変換(18.31)と，それに続いて，この“下向き”の弱アイソスピノルを実数に変換するU(1)変換(18.32)から成る．この SU(2) × U(1) 変換の下で，他のすべての場も式(17.32a), (17.32b), (17.37a), (17.37b)によって同時に変換される．我々はすべての場が，既にユニタリーゲージによって表現されているものと仮定する．

ラグランジアン密度(18.50)をユニタリーゲージへ変換するために，式(19.1)をこれに代入する．また式(17.43)とその複素共役，および式(17.45)を用いて，場 $W_j^\mu(x)$ と $B^\mu(x)$ を，$W^\mu(x)$, $W^{\dagger\mu}(x)$, $Z^\mu(x)$, $A^\mu(x)$ に置き換える．この段階ではまだ古典場を扱っているので $W^{\dagger\mu}(x)$ は複素共役場を意味する．この表記を採用するのは，これらの場に量子化を施すと $W^{\dagger\mu}(x)$ がエルミート共役な場の演算子になることを予想しているからである．この変換を施す動機は，もちろん量子化された場 $W^\mu(x)$, $W^{\dagger\mu}(x)$, $Z^\mu(x)$, $A^\mu(x)$ に，それぞれ $W^\pm$ ボゾン，Z^0 ボゾンおよび光子を対応させることにある．このラグランジアン密度の変換の手続きは，直接的であるが退屈な作業なので，ここでは結果だけを引用する．

式(18.50)における $\mathcal{L}^{\mathrm{B}} + \mathcal{L}^{\mathrm{H}}$ の項を変換すると，次式を得る[2]．

---

[2] これ以降に示す式では，すべての場が同じ引数 x を持つので，これを省いて表記する．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\mathrm{B}} + \mathcal{L}^{\mathrm{H}} = &-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &-\frac{1}{2} F^{\dagger}_{W\mu\nu} F^{\mu\nu}_{W} + m_W^2 W^{\dagger}_{\mu} W^{\mu} \\ &-\frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_{\mu} Z^{\mu} \\ &+\frac{1}{2} \left(\partial^{\mu}\sigma\right)\left(\partial_{\mu}\sigma\right) - \frac{1}{2} m_H^2 \sigma^2 \\ &+\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BB}} + \mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{HH}} + \mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{HB}}\end{aligned} \tag{19.2}$$

定数項は省いた．$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BB}}$ などは，以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BB}} = &\ \mathrm{i} g \cos\theta_{\mathrm{W}} \Big[(W^{\dagger}_{\alpha} W_{\beta} - W^{\dagger}_{\beta} W_{\alpha}) \partial^{\alpha} Z^{\beta} \\ &\qquad + (\partial_{\alpha} W_{\beta} - \partial_{\beta} W_{\alpha}) W^{\dagger\beta} Z^{\alpha} - (\partial_{\alpha} W^{\dagger}_{\beta} - \partial_{\beta} W^{\dagger}_{\alpha}) W^{\beta} Z^{\alpha} \Big] \\ &+ \mathrm{i} e \Big[(W^{\dagger}_{\alpha} W_{\beta} - W^{\dagger}_{\beta} W_{\alpha}) \partial^{\alpha} A^{\beta} \\ &\qquad + (\partial_{\alpha} W_{\beta} - \partial_{\beta} W_{\alpha}) W^{\dagger\beta} A^{\alpha} - (\partial_{\alpha} W^{\dagger}_{\beta} - \partial_{\beta} W^{\dagger}_{\alpha}) W^{\beta} A^{\alpha} \Big] \\ &+ g^2 \cos^2\theta_{\mathrm{W}} \Big[W_{\alpha} W^{\dagger}_{\beta} Z^{\alpha} Z^{\beta} - W_{\beta} W^{\dagger\beta} Z_{\alpha} Z^{\alpha} \Big] \\ &+ e^2 \Big[W_{\alpha} W^{\dagger}_{\beta} A^{\alpha} A^{\beta} - W_{\beta} W^{\dagger\beta} A_{\alpha} A^{\alpha} \Big] \\ &+ e g \cos\theta_{\mathrm{W}} \Big[W_{\alpha} W^{\dagger}_{\beta} (Z^{\alpha} A^{\beta} + A^{\alpha} Z^{\beta}) - 2 W_{\beta} W^{\dagger\beta} A_{\alpha} Z^{\alpha} \Big] \\ &+ \frac{1}{2} g^2 W^{\dagger}_{\alpha} W_{\beta} \Big[W^{\dagger\alpha} W^{\beta} - W^{\alpha} W^{\dagger\beta} \Big]\end{aligned} \tag{19.3a}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{HH}} = -\frac{1}{4} \lambda \sigma^4 - \lambda v \sigma^3 \tag{19.3b}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{HB}} = &\ \frac{1}{2} v g^2 W^{\dagger}_{\alpha} W^{\alpha} \sigma + \frac{1}{4} g^2 W^{\dagger}_{\alpha} W^{\alpha} \sigma^2 \\ &+ \frac{v g^2}{4 \cos^2\theta_{\mathrm{W}}} Z_{\alpha} Z^{\alpha} \sigma + \frac{g^2}{8 \cos^2\theta_{\mathrm{W}}} Z_{\alpha} Z^{\alpha} \sigma^2\end{aligned} \tag{19.3c}$$

式(19.2)において導入した３つのパラメーター m_W, m_Z, m_H は，それぞれ次のように定義される．

$$m_W = \frac{1}{2} v g, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos\theta_{\mathrm{W}}}, \quad m_H = \sqrt{-2\mu^2} \tag{19.4}$$

v と弱混合角 θ_{W} は，式(18.59)と式(17.47)から，次のように与えられる．

$$v = \left(-\mu^2/\lambda\right)^{1/2} \quad (>0) \tag{19.5}$$

$$g \sin\theta_{\mathrm{W}} = g' \cos\theta_{\mathrm{W}} = e \tag{19.6}$$

次に，式(18.50)の残りの２つの項 $\mathcal{L}^{\mathrm{L}}+\mathcal{L}^{\mathrm{LH}}$ を考えよう．ここでも場 W_j^μ と B^μ を，W^μ, $W^{\dagger\mu}$, Z^μ, A^μ へ変換する．更に，式(17.11)を利用して，左手型と右手型のレプトン場 ψ^{L} と ψ^{R} を，完全な場 ψ に置き換える．このようにして次式を得る．

$$\mathcal{L}^{\mathrm{L}}+\mathcal{L}^{\mathrm{LH}}=\bar{\psi}_l(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m_l)\psi_l+\bar{\psi}_{\nu_l}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m_{\nu_l})\psi_{\nu_l}+\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{LB}}+\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{HL}} \tag{19.7}$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{LB}}$ と $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{HL}}$ は，次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{LB}} &= e\bar{\psi}_l\gamma^\alpha\psi_l A^\alpha \\ &\quad -\frac{g}{2\sqrt{2}}\left[\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_l W_\alpha+\bar{\psi}_l\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}W_\alpha^\dagger\right] \\ &\quad -\frac{g}{4\cos\theta_{\mathrm{W}}}\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\psi_{\nu_l}Z_\alpha \\ &\quad +\frac{g}{4\cos\theta_{\mathrm{W}}}\bar{\psi}_l\gamma^\alpha(1-4\sin^2\theta_{\mathrm{W}}-\gamma_5)\psi_l Z_\alpha\end{aligned} \tag{19.3d}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{HL}}=-\frac{1}{v}m_l\bar{\psi}_l\psi_l\sigma-\frac{1}{v}m_{\nu_l}\bar{\psi}_{\nu_l}\psi_{\nu_l}\sigma \tag{19.3e}$$

式(19.7)において導入したパラメーター m_l と m_{ν_l} は，次のように定義される．

$$m_l=\frac{vg_l}{\sqrt{2}},\qquad m_{\nu_l}=\frac{vg_{\nu_l}}{\sqrt{2}} \tag{19.8}$$

最後に，式(19.2)と式(19.7)を組み合わせれば，電弱標準理論のユニタリーゲージにおける完全なラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ が，次のように表される．

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_{\mathrm{I}} \tag{19.9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}_l(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m_l)\psi_l+\bar{\psi}_{\nu_l}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m_{\nu_l})\psi_{\nu_l} \\ &\quad -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &\quad -\frac{1}{2}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu}+m_W^2W_\mu^\dagger W^\mu \\ &\quad -\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}+\frac{1}{2}m_Z^2Z_\mu Z^\mu \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(\partial^\mu\sigma\right)\left(\partial_\mu\sigma\right)-\frac{1}{2}m_H^2\sigma^2\end{aligned} \tag{19.10}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}=\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{LB}}+\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BB}}+\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{HH}}+\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{HB}}+\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{HL}} \tag{19.11}$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ を構成する各項 $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{LB}},\dots$ は，式(19.3a)-(19.3e)によって与えられる．

式(19.10)を自由場のラグランジアン密度と解釈できることは明らかで，それぞれの場を通常の方法に従って量子化できる．この式の１行目の２つの項は，質量 m_l の

荷電レプトンと，質量 m_{ν_l} のニュートリノのラグランジアン密度である．２行目は光子，３行目は質量 m_W の荷電ベクトルボゾン ($W^{\pm}$)，４行目は質量 m_Z の中性ベクトルボゾン (Z^0) を記述する．式(19.10) の最後の行は中性Klein-Gordon場のラグランジアン密度であり，量子化された $\sigma(x)$ 場は，質量 m_H，スピン０の中性ボゾン (Higgsスカラーボゾン) を記述している．$W^{\pm}$ ボゾンと Z^0 ボゾンの質量項は，ラグランジアン密度(18.50) の SU(2) × U(1) ゲージ不変性の自発的な破れに起因して生じている．これに対して電磁的ゲージ不変性は自発的な破れを起こしていないので，光子は質量を持たないままで残る (すなわち式(19.10) において $A_\mu A^\mu$ という項がない)．式(19.10) の１行目の中のレプトン質量の項は，式(18.50) における湯川型結合項 $\mathcal{L}^{\mathrm{LH}}$ に起源を持つ．

式(19.11) は電弱標準理論の相互作用ラグランジアン密度であり，各項を表す式 (19.3a)-(19.3e) が，それぞれの粒子の種類の組合せに関する相互作用を記述する．たとえば $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{LB}}$ はレプトン (L) とゲージボゾン (B) の相互作用を表す，等々である．これらの各項については，次節でこれらを摂動論で扱うための Feynman規則を導出する際に論じることにする．

式(19.4) と式(19.8) は，各ボゾンと各レプトンの質量を，この理論が持つ６個の基礎パラメーターにあたる，

$$g, \quad g', \quad -\mu^2, \quad \lambda, \quad g_l, \quad g_{\nu_l} \tag{19.12}$$

に関係づけている．さらに注目に値する点は，$W^{\pm}$ ボゾンと Z^0 ボゾンの質量が，実験的によく知られている３つの量から決定できることである．この３つの量とは，微細構造定数，

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.04} \tag{19.13a}$$

と，Fermi結合定数 (式(16.70))，

$$G = 1.166 \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \tag{19.13b}$$

および弱混合角 θ_{W} である．

$$\sin^2\theta_{\mathrm{W}} = 0.23122 \pm 0.00015 \tag{19.13c}$$

式(16.43), (17.49), (19.4) により，パラメーター v を，G で表せる．

$$v = \frac{1}{\left(G\sqrt{2}\right)^{1/2}} \tag{19.14}$$

そして，式(19.4), (19.6), (19.14) を組み合わせると，次式が得られる．

$$m_W = \left(\frac{\alpha\pi}{G\sqrt{2}}\right)^{1/2} \frac{1}{\sin\theta_{\rm W}}, \qquad m_Z = \left(\frac{\alpha\pi}{G\sqrt{2}}\right)^{1/2} \frac{2}{\sin 2\theta_{\rm W}} \tag{19.15}$$

式(19.13) を式(19.15) に代入すると，次の値を得る．

$$m_W = 77.5\,\text{GeV}, \qquad m_Z = 88.4\,\text{GeV}$$

これらは，直接の実験から得られている値(16.1) と少し違っている．違いの理由は，式(19.15) の導出において輻射補正を無視した点にあり，精度を上げるには式(19.15) も，そこから得られる値にも α の次数に応じた修正が必要である[3)]．輻射補正の計算には，繰り込みに関する議論が必要となるが，これは本書で扱う範囲外の事項である．ここでは結果的に，輻射補正を考慮して繰り込まれた (すなわち物理的な) 質量の予言値が，直接の実験値とよく一致すると述べるにとどめる．

式(19.6) を見ると，微細構造定数と弱混合角から結合定数 g と g' も決定できることが分かる．同様に Higgs-レプトン結合定数 g_l と g_{ν_l} も対応するレプトンの質量が分かれば，式(19.8) と式(19.14) によって知ることができる．

理論の基礎パラメーター(19.12) の中で，残る $(-\mu^2)$ と λ には，式(19.5) により $(-\mu^2) = \lambda v^2$ の関係があるので (v は G より既知. 式(19.14)参照)，唯一まだ決まっていないのは λ であると言ってよい．λ は Higgs自己結合項 $\mathcal{L}_{\rm I}^{\rm HH}$ (式(19.3b)) において結合定数として現れており，λ は Higgsボゾンの質量も決めている．式(19.4) と式(19.5) により，Higgsボゾンの質量は次のように表される．

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda v^2} \tag{19.16}$$

Higgsボゾンは未発見なので，その質量，もしくは等価的に λ は直接の測定ができていない．しかしながら，これに任意の値を仮定して，任意の電弱過程において Higgsボゾンが放射-再吸収される高次ダイヤグラムからの寄与を計算してみることは可能である．これらのダイヤグラムを他の高次ダイヤグラムとともに計算しても，最低次数による予言に対して小さな補正しか生じない．多くの過程において，この補正にあたる量が実験的に評価されており，観測される補正と計算される補正が一致するためには，信頼度68％の水準で，

$$m_H = 84^{+34}_{-26}\,\text{GeV}$$

[3)] 式(19.15) は，ラグランジアン(19.10) における質量と結合定数の関係から得たものであり，繰り込まれた (すなわち物理的な) 質量と結合定数の関係による結果ではない．また我々は式(16.43) を用いたが，これは最低次のダイヤグラム (p.446, 図16.6) から導いた式である．

が要請される．Higgs質量の上限は，信頼度95％の水準で154 GeVである．他方において，仮にHiggs質量が113.5 GeV未満であれば，Higgsボゾンは既に発見されていて然るべきである(19.5節参照)．以上の結果から，Higgsボゾンの質量は，既に次の範囲まで実験的に絞られていると言える．

$$113.5\,\mathrm{GeV} < m_H \leq 160\,\mathrm{GeV} \tag{19.17}$$

19.2 Feynman規則

電弱標準理論を摂動論で扱う際のFeynman規則を導いてみよう．ここでは最低次でゼロにならない過程だけのFeynman振幅を求めることを目的とする．ユニタリーゲージを採用するので，ラグランジアン密度は式(19.9)-(19.11)によって与えられる．QEDの文脈において論じたように(式(6.9)および式(6.10))，ラグランジアン密度$\mathcal{L}_0$および$\mathcal{L}_\mathrm{I}$は，量子化された理論において正規積として解釈すべきである．これ以降も常に正規順序化が含意されているものと見なす．ラグランジアン密度(19.9)-(19.11)は電磁的ゲージ変換の下で不変であり，我々はこれまでと同様に，ここでもFeynmanゲージを採用する．このゲージでは自由な電磁場のラグランジアン密度が式(18.22)で与えられる．すなわち自由場のラグランジアン密度(19.10)を，

$$\mathcal{L}_0^{\mathrm{Feynman}} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2}\left[\partial_\mu A^\mu(x)\right]^2 \tag{19.18}$$

に置き換える．これ以降は，この修正されたラグランジアン密度$\mathcal{L}_0^{\mathrm{Feynman}}$を改めて$\mathcal{L}_0$と表記する．

6.2節において，相互作用ラグランジアン密度$\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)$が場の演算子の微分を含まないならば，相互作用描像では相互作用をする場が自由場と同じ運動方程式と交換関係を満たすことを見た．この結果によってS行列展開(6.23)が得られ，そこから第7章でFeynman振幅を求めるためのFeynman規則が導かれた．電弱理論では相互作用ラグランジアン密度$\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)$が場の微分を含んでいる．しかしながら$\mathcal{L}_\mathrm{I}(x)$が微分を含むか否かにかかわらず，一般にS行列展開は，

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n!} \int \cdots \int \mathrm{d}^4x_1 \ldots \mathrm{d}^4x_n \, \mathrm{T}\left\{\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_1)\ldots\mathcal{L}_\mathrm{I}(x_n)\right\} \tag{19.19}$$

と与えられる．この展開式はS行列要素の評価の際に自由場の交換関係を使う限りにおいて妥当する[4]．QEDに関しては，

[4] このS行列展開の導出についてはN. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, 3rd edn, Wiley, New York, 1979, Section 2.1を参照されたい．

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) = -\mathcal{H}_{\mathrm{I}}(x) \tag{19.20}$$

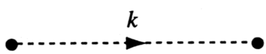
であり，式(19.19)は我々が前に用いた展開式(6.23)に帰着する．これらの結果から，QEDに関する第7章の手続きと同様の手続きを式(19.19)に適用すれば，電弱理論における Feynman規則が導かれることが分かる．

我々の電磁的ゲージの選択の下で，QEDの Feynman規則はそのまま引き継がれる[5]．Feynman規則を電弱理論にまで拡張するための議論は，大局的には QEDに対する規則の議論とよく似ている．我々は新たに現れる特徴を主に論じることにして，それ以外の部分については付録Bに結果だけを与え，個別の詳しい考察は読者に委ねる．

初めに，新たに現れる内線 (伝播関数) と外線 (始状態と終状態の粒子) を考える．中性レプトン (ニュートリノと反ニュートリノ) による伝播関数と外線については，付録Bの Feynman規則3および4に既に含めてある．$W^{\pm}$ボゾンの伝播関数と外線は，16.4節において IVB理論を考察した際に与えた (Feynman規則11および12)．Z^0ボゾンを含めるための拡張の方法は自明であり，付録Bでは $W^{\pm}$ボゾンと Z^0ボゾン両方に関する結果を Feynman規則11および12として規定してある．最後に Higgs粒子も扱う必要がある．これは3.1節で扱ったような，質量を持つ中性のスピン0粒子である．場 $\sigma(x)$ の消滅・生成演算子への展開は，式(3.7)と同様に与えられる．ただし Higgsボゾンのスピンはゼロなので，展開式は偏極ベクトルを含まず，Higgsスカラーボゾンの外線因子は不要である．Higgsスカラーボゾンのための伝播関数は，式(3.58)から与えられ，これに関する Feynman規則は次のようになる．

13. Higgsボゾンの内線それぞれに対し，その内線に付記されている運動量 k に応じて，次の因子を充てる．

$$\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(k, m_H) = \frac{\mathrm{i}}{k^2 - m_H^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{19.21}$$



m_H は Higgsスカラーボゾンの質量である．(我々は Higgsスカラーボゾンの伝播を破線で表すことにする．)

次に，相互作用(19.11)によって生じる基本結節点（ヴァーテックス）を論じなければならない．式(19.3a)-(19.3e)が18個の項を持つことから，18種類の結節点（ヴァーテックス）が現れる．読者はこれに驚く必要はない．これらの結節点（ヴァーテックス）に関する Feynman規則を書くことは容易であり，すぐこの後にこれを行う．

手始めに，式(19.3a)-(19.3e)に含まれる項を表19.1にまとめる．表の左側の列に，

[5] 本書末尾の付録Bにおいて，QEDの Feynman規則と，これから導く電弱理論の Feynman規則をまとめて示す．

表19.1 電弱標準理論における18種類の基本相互作用.

参照先		相互作用の種類	項番号*
$\mathcal{L}_{\rm I}^{\rm BB}$ 式(19.3a)	1行目，2行目	$W^\dagger WZ$	1
	3行目，4行目	$W^\dagger WA$	2
	5行目	$W^\dagger WZ^2$	3
	6行目	$W^\dagger WA^2$	4
	7行目	$W^\dagger WAZ$	5
	8行目	$(W^\dagger W)^2$	6
$\mathcal{L}_{\rm I}^{\rm HH}$ 式(19.3b)	第1項	σ^4	7
	第2項	σ^3	8
$\mathcal{L}_{\rm I}^{\rm HB}$ 式(19.3c)	第1項	$W^\dagger W\sigma$	9
	第2項	$W^\dagger W\sigma^2$	10
	第3項	$Z^2\sigma$	11
	第4項	$Z^2\sigma^2$	12
$\mathcal{L}_{\rm I}^{\rm LB}$ 式(19.3d)	1行目	$\bar{l}lA$	13
	2行目	$\bar{\nu}_l lW + {\rm h.c.}$	14
	3行目	$\bar{\nu}_l \nu_l Z$	15
	4行目	$\bar{l}lZ$	16
$\mathcal{L}_{\rm I}^{\rm HL}$ 式(19.3d)	第1項	$\bar{l}l\sigma$	17
	第2項	$\bar{\nu}_l \nu_l \sigma$	18

*付録Bの(B.1)-(B.18)に示すダイヤグラムおよび結節点因子と対応している.

これらの式の中の各項の所在を示してある．表の右端の列において各項に番号を付けてあるが，これらは付録Bに示した結節点(ヴァーテックス)因子(B.1)-(B.18) (p.541-546)と対応している．中央右寄りの列には，各項が含んでいる場を示してある．(ψ_lをl, $\bar{\psi}_l$を$\bar{l}$のように簡略表記.)

QEDの基本結節点(ヴァーテックス)が図7.1 (p.116)のような8種類の基本過程を代表していたのと同様に，この表に示した各項も，それぞれが電荷保存とレプトン数保存に抵触しない範囲内で多くの可能性を代表していることを銘記する必要がある．すべての相互作用が1箇所の時空点で起こる局所的な相互作用である．18個の項から生じる結節点(ヴァーテックス)の種類の違いは表19.1を見れば明らかであるが，これらのダイヤグラムを付録Bの(B.1)-(B.18)に示してある．たとえば項番号1番と2番は，3つのゲージボソンの相互作用を記述し((B.1)と(B.2))，3-6番は4つのゲージボソンの相互作用を記述する((B.3)-(B.6))，等々である．レプトン-ボソン相互作用項である13-16番は，式

(17.48) において既に見ている．13番は通常のQED相互作用を表し，14番は荷電レプトンカレントと $W^{\pm}$ ボゾンの相互作用を，15番と16番は中性レプトンカレントと Z^0 ボゾンの相互作用を表す．

この他の相互作用はHiggsボゾンを含んでいる．7番と8番は，3つもしくは4つのHiggsボゾンの自己相互作用であり，9-12番はHiggsボゾンと質量を持つベクトルボゾンとの相互作用である．Higgsボゾンは電荷を持たないので，光子と直接に結合することはない．17番と18番は $\mathcal{L}^{\mathrm{LH}}$ (式(18.44)) に起源を持ち，Higgsボゾンと荷電レプトン，およびHiggsボゾンとニュートリノの相互作用を表す．後者の相互作用は，ニュートリノの質量がゼロでない場合にのみ生じる．

これらの18個の相互作用項からそれぞれの結節点（ヴァーテックス）因子を導く作業は，7.2.1項においてQEDに関して行った作業と全く同様である．ここで読者にQEDにおける議論を思い起こしてもらい，電弱相互作用に生じる新たな特徴について簡単に論じておく．そうすれば読者は付録BのFeynman規則14に与えてある18種類の結節点（ヴァーテックス）因子をすべて容易に導出できるはずである．

7.2.1項では，S行列展開(19.19)の1次の項，

$$S^{(1)} = \mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) \tag{19.22}$$

の自由粒子状態間の行列要素を計算することによって，QEDの結節点（ヴァーテックス）因子 $\mathrm{i}e\gamma^{\alpha}$ を得た．S行列要素から1次のFeynman振幅 $\mathcal{M}$ を求め，そこから外線因子を省いたものを結節点（ヴァーテックス）因子と見なした．QEDの場合は，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}(x) = e\left(\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi A_{\alpha}\right)_x \tag{19.23}$$

であった．7.2.1項では基本過程 $e^- \to e^- + \gamma$ を考え，1次のFeynman振幅として，

$$\mathcal{M} = \mathrm{i}e\bar{u}(\mathbf{p}')\gamma^{\alpha}u(\mathbf{p})\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{p}'-\mathbf{p}) \tag{7.32}$$

を得て，ここから3つの外線因子を除いて結節点（ヴァーテックス）因子 $\mathrm{i}e\gamma^{\alpha}$ を決めた．この結節点因子は，式(19.23)から場の演算子を除き，因子 i を掛けることによって (式(19.22)の係数因子 i そのものである) 直接に読み取ることもできる．もちろん図7.1 (p.116) の中の他の任意の基本過程を用いても，同じ結節点因子が得られる．

次に，電弱理論の結節点（ヴァーテックス）因子を導く際に，新たに現れる特徴について論じる．

第1に，式(19.3a)-(19.3e)の中の相互作用のいくつかは，同種の場の演算子を1次ではなく高い次数で含んでいて，このことはFeynman振幅に対する余分の組合せ

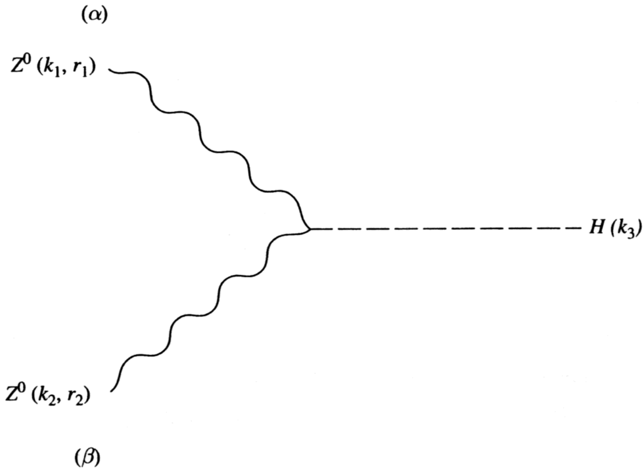


図19.1　1次過程 $Z^0(k_1,r_1)+Z^0(k_2,r_2)\to H(k_3)$.

因子を生じる．例として，式(19.3c)の第3項，

$$\frac{vg^2}{4\cos^2\theta_W}g^{\alpha\beta}Z_\alpha(x)Z_\beta(x)\sigma(x) \tag{19.24}$$

を考えてみよう．この項の結節点（ヴァーテックス）因子を，次の1次過程を利用して計算する．

$$Z^0(k_1,r_1)+Z^0(k_2,r_2)\ \to\ H(k_3) \tag{19.25}$$

H は Higgsボゾンを表し，k_i $(i=1,2,3)$ は3つの粒子の4元運動量である．r_1 と r_2 は2つのベクトルボゾンの偏極状態を指定している．この過程の Feynmanダイヤグラムを図19.1に示す．式(19.24)に含まれる2つの演算子 $Z(x)$ のどちらかが $Z^0(k_1,r_1)$ ボゾンを消滅させ，もう一方が $Z^0(k_2,r_2)$ ボゾンを消滅させる．このことから組合せ因子 2! が生じ，結節点（ヴァーテックス）因子は式(B.11)にも示してあるように，

$$\frac{ivg^2}{2\cos^2\theta_W}g^{\alpha\beta} \tag{19.26}$$

となる．図19.1と(B.11)において，結節点因子(19.26)のテンソル添字 α と β を，それらが関係する Z^0 ボゾン外線それぞれに付記してある．同じ結節点（ヴァーテックス）因子は，もちろん類縁関係にある任意の過程，たとえば $Z^0+Z^0+H\to$ vacuum のような過程

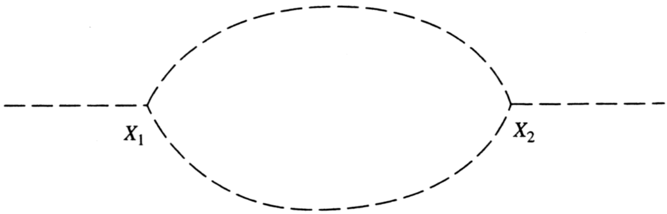


図19.2 Higgsボゾン線の修正.

から得ることもできる．この基本結節点(ヴァーテックス)，すなわちこの結節点(ヴァーテックス)の本質的特徴だけを表現したFeynmanダイヤグラムを，付録Bの(B.11)に示してある．

他の相互作用項に関する組合せ因子も，同じ方法で導くことができる．輻射補正を含むグラフでは，さらに追加的な因子が生じる．例として，図19.2に示すようなHiggsボゾン線の修正を考察しよう．この場合，上述のような議論によれば，２つの結節点(ヴァーテックス)それぞれにおいて組合せ因子 3! が生じ，全体としては因子 $(3!)^2$ が掛かるように見える．しかし正しい加重因子は $(3!)^2/2$ になることを容易に確認できる．$[\sigma(x_1)]^3[\sigma(x_2)]^3$ において，３つの演算子 $\sigma(x_1)$ から外線に充てるものを任意にひとつ選び，３つの演算子 $\sigma(x_2)$ から外線に充てるものを任意にひとつ選ぶと，残った $[\sigma(x_1)]^2[\sigma(x_2)]^2$ を縮約して２つの伝播関数にする方法は２通りだけである．我々は電弱理論における輻射補正の計算には手を付けないので，これらの追加的な組合せ因子を決める規則の導出は行わない．

第２の注意点は，ベクトル場に関係するテンソル添字の順序についてである．これを，式(19.3a)の５行目の $WW^\dagger Z^2$ 相互作用項において見てみよう．

$$g^2\cos^2\theta_{\mathrm{W}}\left[W_\alpha W_\beta^\dagger Z^\alpha Z^\beta - W_\beta W^{\dagger\beta} Z_\alpha Z^\alpha\right] \tag{19.27}$$

結節点(ヴァーテックス)因子を見出すために，次の１次過程を考える．

$$Z^0(k_1,r_1) + Z^0(k_2,r_2) \;\to\; W^+(k_1',r_1') + W^-(k_2',r_2') \tag{19.28}$$

これに対応するFeynmanダイヤグラムを図19.3に示す．まず，終状態の $W^+(k_1',r_1')$ ボゾンと $W^-(k_2',r_2')$ ボゾンが，それぞれ演算子 $W^\dagger(x)$ と $W(x)$ によって生成されるべきことを指摘しておく(式(16.22))．これに対して始状態の $Z^0(k_1,r_1)$ ボゾンは，式(19.27)における２つの演算子 $Z(x)$ のどちらによって消滅してもよく，$Z^0(k_2,r_2)$

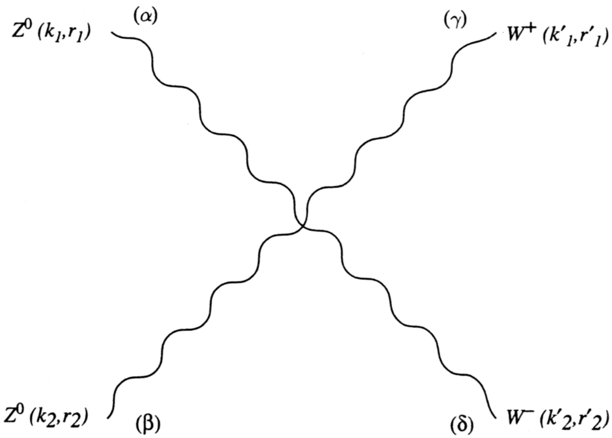


図19.3　1次過程 $Z^0(k_1, r_1) + Z^0(k_2, r_2) \to W^+(k_1', r_1') + W^-(k_2', r_2')$. テンソル添字 $(\alpha) \ldots (\delta)$ は結節点因子(19.30)に対応する.

は残ったもう一方の $Z(x)$ によって消滅する．ここから次のFeynman振幅が得られる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} = \mathrm{i}g^2 \cos^2\theta_{\mathrm{W}} \Big\{ & \varepsilon_\alpha(2')\varepsilon_\beta(1')\left[\varepsilon^\alpha(1)\varepsilon^\beta(2) + \varepsilon^\alpha(2)\varepsilon^\beta(1)\right] \\
& - \varepsilon_\beta(2')\varepsilon^\beta(1')\left[\varepsilon_\alpha(1)\varepsilon^\alpha(2) + \varepsilon_\alpha(2)\varepsilon^\alpha(1)\right] \Big\}
\end{aligned}
\tag{19.29}
$$

ここでは，たとえば $\varepsilon_{r_1'\beta}(\mathbf{k}_1')$ を $\varepsilon_\beta(1')$ のように略記している．テンソル添字を付け替えて，すべての項が共通因子 $\varepsilon_\alpha(1)\varepsilon_\beta(2)\varepsilon_\gamma(1')\varepsilon_\delta(2')$ を持つようにすると，式(19.29)は次式になる．

$$
\mathcal{M} = \varepsilon_\alpha(1)\varepsilon_\beta(2)\varepsilon_\gamma(1')\varepsilon_\delta(2')\,\mathrm{i}g^2\cos^2\theta_{\mathrm{W}}\left[g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\right]
$$

結節点（ヴァーテックス）因子は，

$$
\mathrm{i}g^2\cos^2\theta_{\mathrm{W}}\left[g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - 2g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\right]
\tag{19.30}
$$

であり，これが(B.3)に与えてある結果である．図19.3と(B.3)において，テンソル添字を結節点（ヴァーテックス）因子(19.30)に対応する適正な順序で外線に付けた．

電弱理論の結節点（ヴァーテックス）が持つ第3の新たな特徴は，$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{BB}}$ (式(19.3a))の $W^\dagger WZ$ の項と $W^\dagger WA$ の項における微分の結合から生じる．平面波展開(16.22)を見ると，これらの微分結合によって結節点（ヴァーテックス）関数に運動量が導入されることが分かる．式(19.3a)における項，

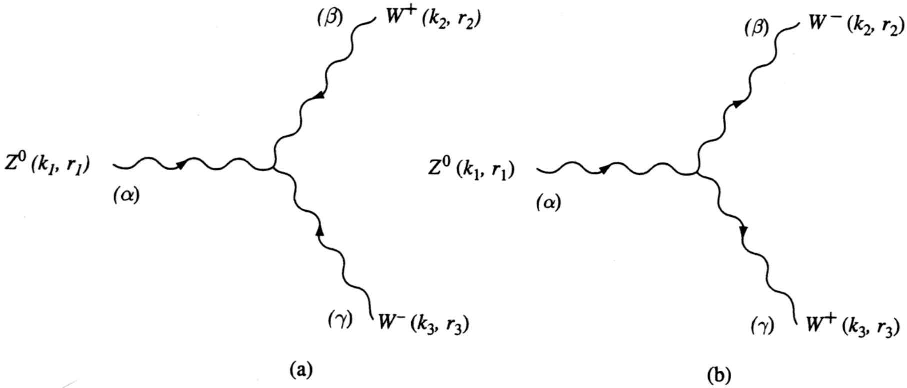


図19.4 互いに関係を持つ1次過程. (a) $Z^0(k_1,r_1)+W^+(k_2,r_2)+W^-(k_3,r_3) \to$ vacuum, (b) $Z^0(k_1,r_1) \to W^-(k_2,r_2)+W^+(k_3,r_3)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{i}g\cos\theta_\mathrm{W}\big[&(W_\alpha^\dagger W_\beta - W_\beta^\dagger W_\alpha)\partial^\alpha Z^\beta \\ &+(\partial_\alpha W_\beta - \partial_\beta W_\alpha)W^{\dagger\beta}Z^\alpha - (\partial_\alpha W_\beta^\dagger - \partial_\beta W_\alpha^\dagger)W^\beta Z^\alpha\big] \qquad (19.31)\end{aligned}$$

に対する正確な結果を得るために，次の過程を考える．

$$Z^0(k_1,r_1)+W^+(k_2,r_2)+W^-(k_3,r_3) \ \to \ \text{vacuum} \qquad (19.32)$$

この過程の Feynman グラフを図19.4(a) に示す．ここで3つのボゾンすべてが結節点(ヴァーテックス)において消滅する過程(19.32) を選んだのは，類縁関係にある $Z^0 \to W^+ + W^-$ のような過程よりも対称性が高いことを考慮したためである．以下に，式(19.32) の反応から，このような類縁過程を記述する結節点(ヴァーテックス)因子を求める方法を示す．図19.4(a) において，各ボゾン線にエネルギー-運動量の向きを表す矢印を ($W^\pm$ ボゾンに関しては, それぞれの電荷の向きでもある)，すべてのボゾンが結節点(ヴァーテックス)に向かうように付けた．

演算子 $W(x)$ および $W^\dagger(x)$ は，それぞれ W^+ および W^- の消滅演算子について1次である．式(16.22) により4元運動量 k，偏極状態 r の W^+ ボゾンの消滅において，演算子 $\partial_\alpha W_\beta(x)$ は次の因子を生じる．

$$(-\mathrm{i}k_\alpha)\varepsilon_{r\beta}(\mathbf{k})$$

演算子 $\partial_\alpha W_\beta(x)$ を $\partial_\alpha W_\beta^\dagger(x)$ もしくは $\partial_\alpha Z_\beta(x)$ で置き換え，W^+ ボゾンを W^- ボゾンもしくは Z^0 ボゾンでそれぞれ置き換えても上式と同じ因子が生じることは，

$W^\dagger(x)$ や $Z(x)$ の平面波展開を考えれば分かる．これらの結果から，過程(19.32)の Feynman 振幅が次のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = -g\cos\theta_\mathrm{W}\Big\{&\Big[\varepsilon_\alpha(3)\varepsilon_\beta(2)-\varepsilon_\beta(3)\varepsilon_\alpha(2)\Big](-\mathrm{i}k_1^\alpha)\varepsilon^\beta(1)\\ &+\Big[(-\mathrm{i}k_{2\alpha})\varepsilon_\beta(2)-(-\mathrm{i}k_{2\beta})\varepsilon_\alpha(2)\Big]\varepsilon^\beta(3)\varepsilon^\alpha(1)\\ &-\Big[(-\mathrm{i}k_{3\alpha})\varepsilon_\beta(3)-(-\mathrm{i}k_{3\beta})\varepsilon_\alpha(3)\Big]\varepsilon^\beta(2)\varepsilon^\alpha(1)\Big\}\end{aligned} \tag{19.33}$$

ここでは $\varepsilon_{r_1}^\alpha(\mathbf{k}_1)$ を $\varepsilon^\alpha(1)$ と書くなどの略記を行っている．テンソル添字を付け替えて，すべての項が共通の因子 $\varepsilon_\alpha(1)\varepsilon_\beta(2)\varepsilon_\gamma(3)$ を持つようにすると，式(19.33)は次のようになる．

$$\mathcal{M} = \varepsilon_\alpha(1)\varepsilon_\beta(2)\varepsilon_\gamma(3)\mathrm{i}g\cos\theta_\mathrm{W}\Big[g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\gamma+g^{\beta\gamma}(k_2-k_3)^\alpha+g^{\gamma\alpha}(k_3-k_1)^\beta\Big] \tag{19.34}$$

対応する結節点(ヴァーテックス)因子は，

$$\mathrm{i}g\cos\theta_\mathrm{W}\Big[g^{\alpha\beta}(k_1-k_2)^\gamma+g^{\beta\gamma}(k_2-k_3)^\alpha+g^{\gamma\alpha}(k_3-k_1)^\beta\Big] \tag{19.35}$$

であり，これを(B.1)に引用してある．図19.4(a)と(B.1)には，結節点(ヴァーテックス)因子(19.35)に対して適切になるように各ボゾン線にテンソル添字を付けてある．この結節点(ヴァーテックス)因子は各ボゾンの4元運動量に依存するので，これに接続する各ボゾン線にエネルギー-運動量の向きを示す矢印が必要である．

図19.4(a)の過程では全部のボゾンが結節点(ヴァーテックス)において消滅するが，他の類縁反応の場合についても式(19.35)から容易に導くことができる．結節点(ヴァーテックス)において Z^0 ボゾンが逆に生成される場合には，式(19.35)において k_1 を $-k_1$ に置き換える．結節点(ヴァーテックス)において W^+W^- 対(つい)が生成する場合には，k_i $(i=2,3)$ を $-k_i$ に置き換え，また $W^\pm$ ボゾンの4元運動量と電荷の向きが結節点(ヴァーテックス)に向かわずに結節点(ヴァーテックス)から離れる向きになるので，W^+ と W^- を入れ換える．このようにして図19.4(b)の Feynman ダイヤグラムに対応する結節点(ヴァーテックス)関数が与えられる．

$$\mathrm{i}g\cos\theta_\mathrm{W}\Big[g^{\alpha\beta}(k_1+k_2)^\gamma+g^{\beta\gamma}(k_3-k_2)^\alpha-g^{\gamma\alpha}(k_1+k_3)^\beta\Big] \tag{19.36}$$

最後に表19.1の項番号の6番，すなわち $\mathcal{L}_\mathrm{I}^\mathrm{BB}$ (式(19.3a))から生じる $(W^\dagger W)^2$ の項に関して注意をしておく．この項に対する結節点(ヴァーテックス)因子(B.6)は，図19.3の過程から結節点(ヴァーテックス)因子(19.30)を導いたのと同じ技法によって得ることができる．しかし

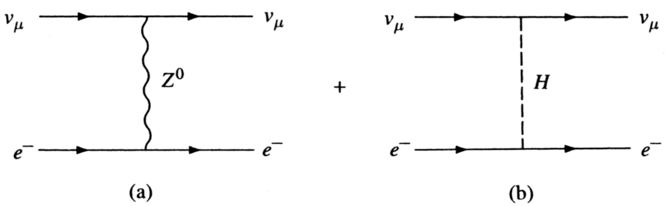


図19.5　$(\nu_\mu e)$ 散乱への最低次の寄与.

$W^\pm$ ボゾンを含む他のすべての過程と異なり，この結節点(ヴァーテックス)因子(B.6)は，添字 α と β，あるいは γ と δ を入れ換えると変更される．したがって，この結節点(ヴァーテックス)因子は $W^\pm$ 電荷が結節点(ヴァーテックス)に入射する向きを持つか出射する向きを持つかに依存する．(B.6) において，これらの向きを各ボゾン線に矢印で示してあり，(B.6) に与えた結節点(ヴァーテックス)因子に対応している．

上述の結果に基づき，式(19.3a)-(19.3e) の形を見れば表19.1に示したすべての項の結節点(ヴァーテックス)因子を書き下すことができる．

これで電弱標準理論に対する Feynman 規則の議論は完了した．これらの規則により，ゼロでない最も次数の低い摂動に関する直接的な計算を実行できる．高次補正の計算は一般に大変多くのグラフを含み，複雑になる．高次補正については時々，結果を引用するだけにして，主に最低次だけに限定した具体的な計算を考察する．

19.3　ニュートリノ - 電子弾性散乱

電弱理論の最初の応用例として，4種類のニュートリノ - 電子弾性散乱を考える．

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-, \qquad \bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^- \tag{19.37a}$$

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-, \qquad \bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^- \tag{19.37b}$$

簡単に，たとえば第1の反応を $(\nu_\mu e)$ 散乱と呼ぶことにする．電弱理論の要請の通りにレプトン数が保存するならば，$(\nu_\mu e)$ 過程と $(\nu_e e)$ 過程に対する 1-ボゾン交換による最低次の寄与は，それぞれ図19.5と図19.6に示す Feynman グラフから生じる．残りの2つの散乱への寄与は，ニュートリノ線を反ニュートリノ線に置き換えることによって表される．これらの4種類の過程の重要性は，これらすべてが中性カレントを含んでおり (図19.5(a), 図19.6(a))，このためこれらの反応から弱混合角 θ_W を決定

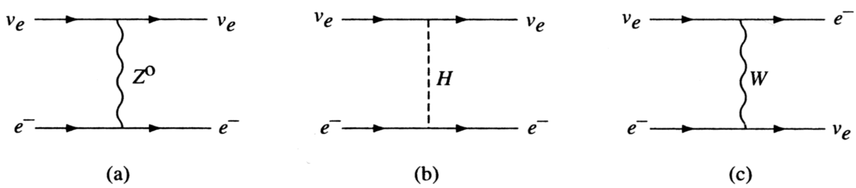


図19.6 $(\nu_e e)$ 散乱への最低次の寄与.

できる点にある. $(\nu_e e)$ 過程と $(\bar{\nu}_e e)$ 過程では, 図19.6(c) のようにひとつの W ボゾンの交換による寄与も加わる.

初めに $(\nu_\mu e)$ 過程について考察しよう. 図19.5 の Feynman グラフと, 付録B の Feynman 規則から, Feynman 振幅は次のように与えられる.

$$\mathcal{M}(\nu_\mu e) = \mathcal{M}_Z(\nu_\mu e) + \mathcal{M}_H(\nu_\mu e) \tag{19.38a}$$

$$\mathcal{M}_Z(\nu_\mu e) = \frac{-g^2}{8\cos^2\theta_{\mathrm{W}}}\left[\bar{u}'_{\nu_\mu}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}\right]\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\alpha\beta}(k,m_Z)\left[\bar{u}'_e\gamma^\beta(g_{\mathrm{V}}-g_{\mathrm{A}}\gamma_5)u_e\right] \tag{19.38b}$$

$$\mathcal{M}_H(\nu_\mu e) = \frac{-1}{v^2}m_{\nu_\mu}m_e\left(\bar{u}'_{\nu_\mu}u_{\nu_\mu}\right)\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(k,m_H)\left(\bar{u}'_e u_e\right) \tag{19.38c}$$

ここで u と $\bar{u}'$ はそれぞれ始状態と終状態におけるレプトンのスピノルで, レプトンの種類 (電子もしくは ν_μ) を添字にしてあるが, 運動量とスピン量子数の表記は省略している. また, 次の略記を導入した.

$$g_{\mathrm{V}} \equiv 2\sin^2\theta_{\mathrm{W}} - \frac{1}{2}, \quad g_{\mathrm{A}} \equiv -\frac{1}{2} \tag{19.39}$$

仲介ボゾンの運動量 k は, 次のように与えられる.

$$k = q - q' = p' - p \tag{19.40}$$

q と q' (p と p') はそれぞれ始状態と終状態のニュートリノ (電子) の運動量である.

$m_Z \approx 91$ GeV と置き, m_H に関する仮定(19.17) を念頭に置くならば, かなりの高エネルギーにおいても,

$$k^2 \ll m_Z^2, \qquad k^2 \ll m_H^2 \tag{19.41a}$$

と考えてよい. この極限における Feynman 振幅(19.38b) と (19.38c) は, 次のようになる.

$$\mathcal{M}_Z(\nu_\mu e) = \frac{-\mathrm{i}G}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}'_{\nu_\mu}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_\mu}\right]\left[\bar{u}'_e\gamma_\alpha(g_{\mathrm{V}}-g_{\mathrm{A}}\gamma_5)u_e\right] \tag{19.42a}$$

$$\mathcal{M}_H(\nu_\mu e) = \mathrm{i}G\sqrt{2}\frac{1}{m_H^2}m_{\nu_\mu}m_e\left(\bar{u}'_{\nu_\mu}u_{\nu_\mu}\right)\left(\bar{u}'_e u_e\right) \tag{19.42b}$$

ここでは，式(19.4)と式(19.14)を用いた．式(19.42a-b)を見ると，$\mathcal{M}_H(\nu_\mu e)$は$\mathcal{M}_Z(\nu_\mu, e)$に対して$m_{\nu_\mu}m_e/m_H^2$のオーダーであり，無視して差し支えない．また，レプトンの質量も無視できるものと仮定する．すなわち，

$$s \equiv (p+q)^2 \gg m_e^2 \tag{19.41b}$$

とする．sは重心系運動量の自乗で，次のように与えられる．

$$s = 4E_{\mathrm{CoM}}^2 = 2m_e E_{\mathrm{Lab}} + m_e^2 \tag{19.43}$$

E_{CoM}は重心系におけるニュートリノのエネルギー，E_{Lab}は標的電子が静止している実験室系におけるニュートリノのエネルギーである．

条件(19.41a)と条件(19.41b)が成立するならば，弾性$(\nu_\mu e)$散乱の全断面積は，直接的な計算により，次のように求まる．

$$\sigma_{\mathrm{T}}(\nu_\mu e) = \frac{G^2 s}{3\pi}\left(g_{\mathrm{V}}^2 + g_{\mathrm{V}}g_{\mathrm{A}} + g_{\mathrm{A}}^2\right) \tag{19.44a}$$

同様にして，弾性$(\bar{\nu}_\mu e)$散乱の全断面積も，次のように求まる．

$$\sigma_{\mathrm{T}}(\bar{\nu}_\mu e) = \frac{G^2 s}{3\pi}\left(g_{\mathrm{V}}^2 - g_{\mathrm{V}}g_{\mathrm{A}} + g_{\mathrm{A}}^2\right) \tag{19.44b}$$

次に，$(\nu_e e)$過程のFeynman振幅を調べよう．

$$\mathcal{M}(\nu_e e) = \mathcal{M}_Z(\nu_e e) + \mathcal{M}_H(\nu_e e) + \mathcal{M}_W(\nu_e e) \tag{19.45}$$

右辺の３つの項は，図19.6の３つのFeynmanグラフに対応して生じている．最初のグラフと２番目のグラフからは，先ほどと同じ形の振幅が導かれるが(式(19.42a)と式(19.42b))，m_{ν_μ}はm_{ν_e}に置き換わる．Higgsボゾンによる寄与$\mathcal{M}_H(\nu_e e)$は無視してよい．ここで，

$$k^2 \ll m_W^2 \tag{19.41c}$$

を仮定し，再びレプトンの質量を無視すると，次の振幅を得る．

$$\mathcal{M}_W(\nu_e e) = \frac{-\mathrm{i}G}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}'_e\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_e}\right]\left[\bar{u}'_{\nu_e}\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_e\right] \tag{19.46}$$

(振幅(19.46)と(19.42a)の相対的な符号の違いは$\mathcal{M}_Z(\nu_e e)$と$\mathcal{M}_W(\nu_e e)$のレプトン外線因子の順序を揃える際の置換因子に対応して生じ，Feynman規則8に従う．)

Fierzの恒等式[6)]，

[6)] この式や，その他のFierz恒等式の導出についてはC. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980, pp.160-162を参照．

$$\left(\bar{u}_1\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_2\right)\left(\bar{u}_3\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_4\right) = \left(\bar{u}_1\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_4\right)\left(\bar{u}_3\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_2\right) \tag{19.47}$$

を利用すると ($u_1, \ldots, u_4$ は任意のスピノルである), 振幅(19.46) が次のように書き直される.

$$\mathcal{M}_W(\nu_e e) = \frac{-\mathrm{i}G}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}'_{\nu_e}\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_{\nu_e}\right]\left[\bar{u}'_e\gamma_\alpha(1-\gamma_5)u_e\right] \tag{19.48}$$

これらの結果により式(19.45) を考えると, Feynman 振幅 $\mathcal{M}(\nu_e e)$ は, 式(19.42a) において ν_μ を ν_e に置き換え, 同時に次の置き換えを施すことによって得られる.

$$g_\mathrm{V} \rightarrow g_\mathrm{V}+1, \qquad g_\mathrm{A} \rightarrow g_\mathrm{A}+1 \tag{19.49}$$

式(19.44a) に式(19.49) の置き換えを施すと, 弾性 $(\nu_e e)$ 散乱の全断面積が得られる. 同様の議論により, 式(19.44b) に同じ置き換えを施すと, 弾性 $(\bar{\nu}_e e)$ 散乱の全断面積が与えられる.

上述の過程は, 実験的には原子内電子にニュートリノを衝突させ, その反跳電子を検出することによって調べられる. $(\nu_\mu e)$ 反応と $(\bar{\nu}_\mu e)$ 反応は, いくつかの研究グループによって, π 中間子の崩壊から生じる ν_μ ビームや $\bar{\nu}_\mu$ ビームを利用して調べられた. $(\bar{\nu}_e e)$ 過程は核反応で中性子の崩壊から生じる $\bar{\nu}_e$ ビームを用いて調べられた. 歴史的には, このような実験と, ニュートリノの核子による散乱の実験が $\sin^2\theta_\mathrm{W}$ の値を決めるために利用された. 1983年までに得られていた最良の値は[7],

$$\sin^2\theta_\mathrm{W} = 0.227 \pm 0.014 \tag{19.50}$$

であった. この値を式(19.5) に代入すると, ウィーク・ボゾンの質量の予言値として,

$$m_W = 78.3 \pm 2.4\,\mathrm{GeV}, \qquad m_Z = 89.0 \pm 2.0\,\mathrm{GeV} \tag{19.51}$$

が得られる. 一方, 1983年に発見されたウィーク・ボゾンの質量は[8],

$$m_W = 81 \pm 3\,\mathrm{GeV}, \qquad m_Z = 94 \pm 4\,\mathrm{GeV} \tag{19.52}$$

であり, 実際に式(19.51) に近い値であった. 今日, 著しく精度の向上したデータの解析から, 弱混合角とウィーク・ボゾンの質量の関係を正確に理解するには, 19.1節

[7] 次のレビューを参照されたい. W. Marciano, *Proceedings of the 1983 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies*, Cornell University, 1983.

[8] これらの値は B. Sadoulet (UA1) and A. Clark (UA2) の Proceedings of the International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies, Cornel University, 1983 における報告値の粗い組合せである.

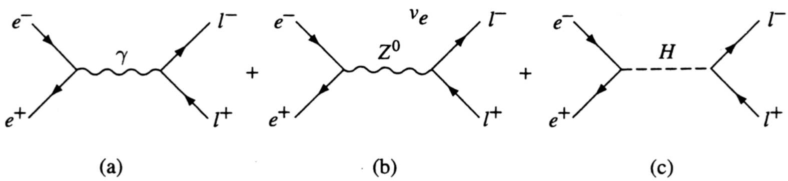


図19.7　$e^+ + e^- \to l^+ + l^-$ への最低次の寄与.

で見たように輻射補正を考慮しなければならないことが分かっている．$\sin^2\theta_{\mathrm{W}}$ の正確な値(19.13c)は，$W^{\pm}$ ボゾンと Z^0 ボゾンが関わる多くの精度の高い実験結果に対して理論特性をフィッティングすることによって得られたものである．

19.4　電子-陽電子消滅の電弱過程

8.4節ではQEDの文脈において電子-陽電子消滅を論じた．この過程を，より広範な電弱理論の枠組みにおいて再考してみよう．次の過程から考察を始める．

$$e^+ + e^- \;\to\; l^+ + l^- \qquad (l = \mu, \tau) \tag{19.53}$$

この過程への最低次の寄与は，図19.7のFeynmanグラフによって記述される．これに対応するFeynman振幅は，次のように与えられる．

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_Z + \mathcal{M}_H \tag{19.54}$$

$$\mathcal{M}_\gamma = \mathrm{i}e^2\left(\bar{u}_l\gamma^\alpha v_l\right)\frac{1}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\left(\bar{v}_e\gamma_\alpha u_e\right) \tag{19.55a}$$

$$\mathcal{M}_Z = \frac{\mathrm{i}g^2}{4\cos^2\theta_{\mathrm{W}}}\left[\bar{u}_l\gamma^\alpha(g_{\mathrm{V}}-g_{\mathrm{A}}\gamma_5)v_l\right]\frac{1}{k^2-m_Z^2+\mathrm{i}\varepsilon}\left[\bar{v}_e\gamma_\alpha(g_{\mathrm{V}}-g_{\mathrm{A}}\gamma_5)u_e\right] \tag{19.55b}$$

$$\mathcal{M}_H = \frac{-\mathrm{i}}{v^2}m_e m_l\left(\bar{u}_l v_l\right)\frac{1}{k^2-m_H^2+\mathrm{i}\varepsilon}\left(\bar{v}_e u_e\right) \tag{19.55c}$$

$\bar{v}_e$ と u_e は始状態における e^+e^- 対(つい)のスピノル，v_l と $\bar{u}_l$ は終状態における l^+l^- 対(つい)のスピノルである．式(19.55b)を書くにあたり，ボゾン伝播関数 $D_{\mathrm{F}\alpha\beta}(k, m_Z)$ から $k_\alpha k_\beta/m_Z^2$ の項を省いた．この項は $m_e m_l/m_Z^2$ 程度の寄与しか持たないからである[9]．

[9] このことを見るためには，$k_\alpha k_\beta/m_Z^2$ において仲介ボゾン運動量を，

$$k = p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \tag{19.56}$$

式(19.55b), (19.55c), (19.4) により，$\mathcal{M}_H/\mathcal{M}_Z$ は，

$$\frac{m_e m_l}{m_Z^2}\frac{k^2-m_Z^2}{k^2-m_H^2} \tag{19.57}$$

のオーダーであることが分かるので，k^2 が m_H^2 に近づかない限り $\mathcal{M}_H$ を無視することができて Feynman 振幅(19.54) は次式へ簡約される．

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_\gamma+\mathcal{M}_Z \tag{19.58}$$

直接的な長い計算を進めると $e^+e^-\to l^+l^-$ の断面積が求まる．重心系における電子のエネルギー E が充分に高いと仮定して，

$$s\equiv k^2=4E^2\gg m_l^2 \tag{19.59}$$

とすると (つまりすべてのレプトン質量を無視する)，重心系における微分断面積が次の形で与えられる．

$$\sigma(\theta)=F(s)\left(1+\cos^2\theta\right)+G(s)\cos\theta \tag{19.60a}$$

θ は重心系における始状態の陽電子の向きと終状態の l^+ の向きのなす角度であり (p.158, 図8.1 と比較せよ)，$F(s)$ と $G(s)$ は次式で表される．

$$F(s)=\frac{\alpha^2}{4s}\left[1+\frac{g_V^2}{\pi\sqrt{2}}\frac{m_Z^2}{s-m_Z^2}\left(\frac{sG}{\alpha}\right)+\frac{(g_V^2+g_A^2)^2}{8\pi^2}\left(\frac{m_Z^2}{s-m_Z^2}\right)^2\left(\frac{sG}{\alpha}\right)^2\right] \tag{19.60b}$$

$$G(s)=\frac{\alpha^2}{4s}\left[\frac{\sqrt{2}g_A^2}{\pi}\frac{m_Z^2}{s-m_Z^2}\left(\frac{sG}{\alpha}\right)+\frac{g_A^2g_V^2}{\pi^2}\left(\frac{m_Z^2}{s-m_Z^2}\right)^2\left(\frac{sG}{\alpha}\right)^2\right] \tag{19.60c}$$

これらの式において α^2，αG，G^2 に比例する項は，それぞれ断面積を導くための $|\mathcal{M}_\gamma+\mathcal{M}_Z|^2$ における $|\mathcal{M}_\gamma|^2$，$\mathcal{M}_\gamma-\mathcal{M}_Z$ 干渉項，$|\mathcal{M}_Z|^2$ から生じている．

エネルギー領域を区分してみよう．第 1 に "低エネルギー領域" を，

$$s\equiv k^2\ll m_Z^2\approx 800\ \mathrm{GeV}^2$$

で，かつ $sG/\alpha\ll 1$ の領域とする．この場合は，式(19.60b) と式(19.60c) において $\mathcal{M}_Z$ から生じる項 (すなわち弱い相互作用の効果) を無視することができるので，式(19.60) は QED の断面積(8.46) に帰着する．

のように書く．p_1 (p_2) と p_1' (p_2') は，それぞれ始状態と終状態の正 (負) のレプトンの運動量である．Dirac 方程式を用いて $\bar{v}_e\not{p}_1$ を $(-\bar{v}_e m_e)$ に置き換えるなどの措置を行う．

s を大きくすると $|\mathcal{M}_\gamma|$ は $1/s$ に従って減少し，$|\mathcal{M}_Z|$ は $|s-m_Z^2|^{-1}$ のように増加する．すなわち式(19.60b)と式(19.60c)における展開パラメーター，

$$\frac{m_Z^2}{|s-m_Z^2|}\left(\frac{sG}{\alpha}\right) \tag{19.61}$$

が増加する．このようにして“中間エネルギー領域”に到達する．この領域では $\mathcal{M}_\gamma$－$\mathcal{M}_Z$ 干渉項が無視できなくなるが，$|\mathcal{M}_Z|^2$ の方は無視してよい．式(19.60b)と式(19.60c)では αG の項が残り，G^2 の項が省かれる．$G(s)$ がゼロではないので，断面積(19.60a)は $\cos\theta$ に依存する項を含み，前方-後方の非対称性を示すようになる．前後非対称性の指標関数が，次のように与えられる．

$$A(\theta) \equiv \frac{\sigma(\theta)-\sigma(\pi-\theta)}{\sigma(\theta)+\sigma(\pi-\theta)} = \frac{G(s)}{F(s)}\frac{\cos\theta}{1+\cos^2\theta} \tag{19.62}$$

ここでは $0 \leq \theta \leq \pi/2$ である．式(19.60b)と式(19.60c)により，G^2 に比例する項を無視すると，これは次のようになる．

$$A(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} g_\mathrm{A}^2 \frac{m_Z^2}{s-m_Z^2}\left(\frac{sG}{\alpha}\right)\frac{\cos\theta}{1+\cos^2\theta} \tag{19.63}$$

$s < m_Z^2$ のとき $A(\theta)$ は負で(すなわち後方散乱の方が多い)，その絶対値はエネルギーに依存して急速に増加する．非対称性の程度に関する概念を得るために，$A(\theta=60°)$ を計算しよう．$g_\mathrm{A} = -\frac{1}{2}$，$m_Z \approx 91\,\mathrm{GeV}$ と置いて，重心系の全エネルギー $\sqrt{s} = 2E = 20, 30, 40\,\mathrm{GeV}$ それぞれに対して，$A(\theta=60°)$ の近似値は $-0.03, -0.07, -0.14$ となる．

非対称性指標 $A(\theta)$ は $\mu^+\mu^-$ を生成するエネルギー領域でも，$\tau^+\tau^-$ を生成するエネルギー領域でも測定されている．実験と理論を比較するには，軟光子の関係する電磁的輻射補正を考慮することが不可欠であるが，これはこの領域において典型的に10％程度の影響を持ち，2％程度の正の非対称度を生じる．8.9節において述べたように，輻射補正の正確な値は測定系に依存する．この理由から，異なる実験の結果を容易に比較できるように，通常は実験データから輻射補正を差し引いたものを理論と照合することになる[10]．

図19.8に典型的な結果を示す．これはTASSO実験で得られた $\sqrt{s} = 34\,\mathrm{GeV}$ における $\mu^+\mu^-$ 生成の“輻射補正を考慮した”角度分布の結果である[11]．実験結果と電弱理論の計算(実線)はよく一致しており，QEDの最低次の計算(破線)による対称

---

[10] 典型的な結果に関する詳細な議論は F. A. Berends and R. Gastmans, Radiative Corrections in e^+e^- Collisions, in: *Electromagnetic Interactions of Hadrons*, vol.2 (edited by A. Donnachie and G. Shaw), Plenum Press, New York, 1978 を参照．

[11] R. Brandelik et al., *Phys. Lett.* **110B** (1982), 173.

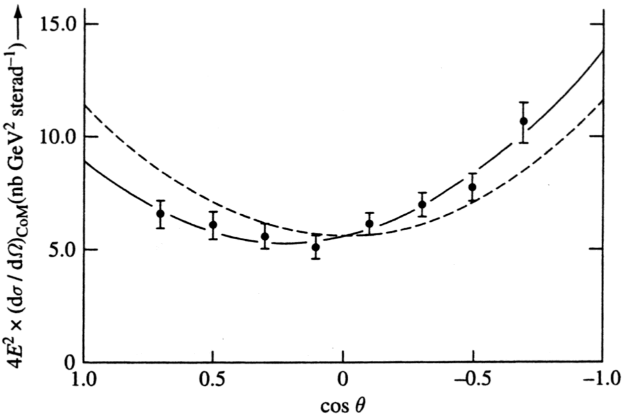


図19.8 $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ の微分断面積 $(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega)_{\mathrm{CoM}}$. 重心系の全エネルギーは $2E = 34$ GeV である. (R. Brandelik et al., Phys. Lett. **110B** (1982), 173 による.) 黒丸は実験データ, 実線は電弱理論による曲線, 破線はQEDによる曲線.

な特性から外れていることが明らかである. 同様の結果がいくつかの他の実験からも得られており, また $\mu^+\mu^-$ 生成や $\tau^+\tau^-$ 生成に関して, 異なるエネルギーでも電弱理論が検証されている.

さらに高エネルギーになると, “Z^0 共鳴領域” $s \approx m_Z^2$ に到達する. すなわち重心系の全エネルギー $\sqrt{s}$ が Z^0 ボソンの質量 m_Z に近くなる. この領域では sG/α が1のオーダーになり, 過程 $e^+ + e^- \to l^+ + l^-$ の断面積に対して式(19.60b), (19.60c)において G^2 に比例する項, すなわち $|\mathcal{M}_Z|^2$ から生じる項が支配的になる. これらの項だけを残すと, 式(19.60a)-(19.60c)から $s \approx m_Z^2$ における全断面積が次のように与えられる.

$$\sigma_{\mathrm{T}}(e^+e^- \to l^+l^-) = \frac{1}{6\pi}\left(g_{\mathrm{V}}^2 + g_{\mathrm{A}}^2\right)^2 \frac{G^2 m_Z^6}{(s - m_Z^2)^2 + \varepsilon^2} \tag{19.64}$$

ここでは一時的に振幅 $\mathcal{M}_Z$ (式(19.55b))の分母にある無限小パラメーターを残した. 式(19.64)を, 次のように書くこともできる.

$$\sigma_{\mathrm{T}}(e^+e^- \to l^+l^-) = \frac{12\pi\Gamma(Z^0 \to e^+e^-)\Gamma(Z^0 \to l^+l^-)}{(s - m_Z^2)^2 + \varepsilon^2} \quad (s \approx m_Z^2) \tag{19.65}$$

ここでは, 次式を利用した.

$$\Gamma(Z^0 \to l^+l^-) = \frac{1}{\pi 6\sqrt{2}} G m_Z^3 \left(g_{\mathrm{V}}^2 + g_{\mathrm{A}}^2\right) \tag{19.66}$$

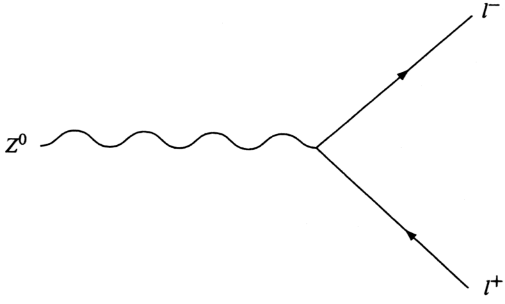


図19.9　Z^0 ボゾンの崩壊過程 $Z^0 \to l^+ + l^-$.

これは，図19.9によって表される崩壊過程，

$$Z^0 \ \to \ l^+ + l^- \qquad (l = e, \mu, \tau) \tag{19.67}$$

の崩壊幅を，m_l^2/m_Z^2 の項を無視して表したものにあたる．この近似の下では崩壊幅(19.66)が生成するレプトン対(つい)の種類 $l = e, \mu, \tau$ には依存しない．崩壊幅の式(19.66)は，12.5節で示した方法によって直接に導出することができるので，これは読者の練習問題とする．

式(19.65)は共鳴エネルギー $\sqrt{s} = m_Z$ における断面積の限りなく狭いピークを表す．もちろん実験的に得られるピークは限りなく狭いわけではない．不確定性原理により，ピークの幅は $\tau^{-1} = \Gamma_{\mathrm{t}}$ 程度のはずである．τ は Z^0 ボゾンの寿命，Γ_{t} は Z^0 ボゾンの崩壊幅である．形式的に見ると $s = m_Z^2$ の付近において，式(19.65)の分母は $\varepsilon \to 0$ とするとゼロになってしまうので，最低次の近似は成立せず，高次補正を無視できなくなる．関係する補正は，図19.10に示すような伝播関数の修正から生じる．これは中間状態として Z^0 ボゾンが崩壊して生じる l^+l^- や $\nu_l\bar{\nu}_l$ のようなフェルミオン-反フェルミオン仮想状態を含む．これらの項の計算は，図9.8 (p.194)の真空偏極グラフについて10.4節で行った計算と似ている．ここでは導出の詳細に言及せず，結果だけを引用すると，式(19.65)は次のように修正される．

$$\sigma_{\mathrm{T}}(e^+e^- \to l^+l^-) = \frac{12\pi\,\Gamma(Z^0 \to e^+e^-)\,\Gamma(Z^0 \to l^+l^-)}{(s - m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_{\mathrm{t}}^2} \quad (s \approx m_Z^2) \tag{19.68}$$

ここでは $\varepsilon = 0$ と置いた．

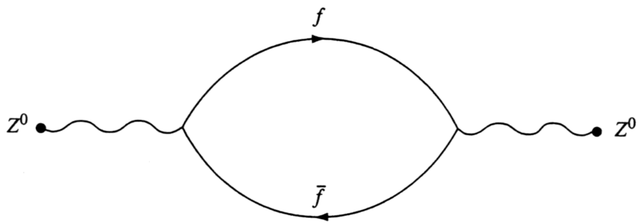


図19.10 フェルミオン-反フェルミオン対 $f\bar{f}$ 中間状態による Z^0 伝播関数の修正.

式(19.68)は，次の1準位Breit-Wigner公式の特例にあたる[12].

$$\sigma_{\mathrm{T}}(i \to X) = 4\pi \frac{m^2}{p^2} \frac{2J+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{\Gamma_i \Gamma_X}{(s-m^2)^2 + m^2\Gamma_{\mathrm{t}}^2} \quad (s \approx m^2)$$

これは不安定な粒子や共鳴(スピン J, 質量 m, 全崩壊幅 Γ_{t})による $i \to X$ 反応の共鳴エネルギー $\sqrt{s} = m$ 付近における重心系での全断面積を与える公式である．Γ_i と Γ_X はそれぞれ入射チャネル (i) と出射チャネル (X) への共鳴からの崩壊の部分幅を表している．s_1 と s_2 は入射チャネルにおける衝突粒子のスピンであり，p は重心系における衝突粒子の一方の3次元運動量である．相対論的に充分に高いエネルギーでは，重心系の全エネルギー $\sqrt{s}$ は衝突粒子の質量に比べて極めて極めて大きくて $p = \sqrt{s}/2 = m/2$ である．この近似の下で我々が考察している e^+e^- 衝突を考えると $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ であり，Breit-Wigner公式は次のようになる．

$$\sigma_{\mathrm{T}}(i \to X) = \frac{4\pi(2J+1)\Gamma_i \Gamma_X}{(s-m^2)^2 + m^2\Gamma_t^2} \quad (s \approx m^2) \tag{19.69}$$

式(19.69)は，仲介 Z^0 ボソンを通じて起こる任意の $e^+e^- \to X$ 反応 $(e^+e^- \to Z^0 \to X)$ に適用できる．共鳴エネルギー $\sqrt{s} = m_Z$ 付近のエネルギーでは，図19.11に示すFeynmanグラフが支配的な役割を果たし，式(19.69)により，全断面積は次式で与えられる．

$$\sigma_{\mathrm{T}}(e^+e^- \to X) = \frac{12\pi\,\Gamma(Z^0 \to e^+e^-)\,\Gamma(Z^0 \to X)}{(s-m_Z^2)^2 + m_Z^2\Gamma_{\mathrm{t}}^2} \quad (s \approx m_Z^2) \tag{19.70}$$

式(19.70)を見ると，反応 $e^+e^- \to X$ の全断面積は $s = m_Z^2$ にピークを持ち，その半値幅は $m_Z\Gamma_{\mathrm{t}}$ であり，ピークの高さは次の部分幅の積に比例する．

$$\Gamma(Z^0 \to e^+e^-)\Gamma(Z^0 \to X)$$

[12] H. M. Pilkuhn, *Relativistic Particle Physics*, Springer, New York, 1979, p.168 を参照されたい．

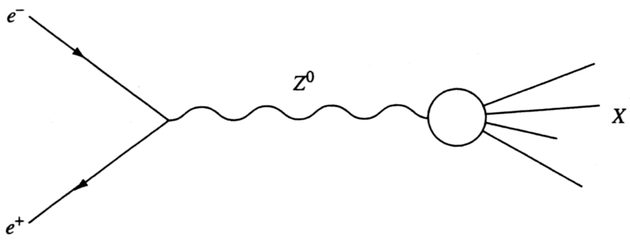


図19.11　Z^0 共鳴ピーク付近における $e^+ + e^- \to X$ 反応への支配的な寄与.

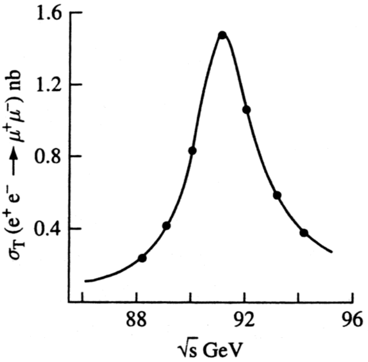


図19.12　全断面積 $\sigma_{\mathrm{T}}(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)$ の，重心系全エネルギー $\sqrt{s} = 2E$ に対する依存性の測定結果 (W. Bartel et al. Zeit. Phys. **C52** (1991) 175 による). 曲線は電弱標準理論から予想される理論曲線である.

したがって電子-陽電子衝突ビームの実験施設は，重心系の全エネルギーを $\sqrt{s} = m_Z \approx 91$ GeV 付近に設定すれば，Z^0 ボソンの性質を調べるために適した実験系になる．この目的で２つの実験施設が建設された．Stanford Linear Collider (SLC) と，CERN の LEP 電子-陽電子貯蔵リングである．特に後者は Z^0 ピークにおいて１時間あたり千個のオーダーの Z^0 ボソン生成が可能となるビーム強度を備えており，Z^0 ボソンの性質をかなり高精度で観測することが可能であった．図19.12 に典型的な結果を示す．これは OPAL 実験において得られた $\mu^+\mu^-$ 生成の断面積である[13)]．同様の結果は別の実験においても e^+e^- 生成，$\mu^+\mu^-$ 生成，$\tau^+\tau^-$ 生成，強粒子(ハドロン)生成そ

13) *Zeit. f. Phys.* **C52** (1991) 175.

れぞれについて得られている．これらの断面積の特性は Breit-Wigner 公式(19.70)によって解析され，Z^0の質量と崩壊幅が実験結果に対するフィッティングパラメーターとして扱われた[14]．いくつもの異なる実験による結果を平均して得られた値は，次のようになっている．

$$m_Z = 91.188 \pm 0.002\,\text{GeV} \tag{19.71a}$$

$$\Gamma_\text{t} = 2.495 \pm 0.002\,\text{GeV} \tag{19.71b}$$

$$\Gamma(Z^0 \to \text{hadrons}) = 1.744 \pm 0.002\,\text{GeV} \tag{19.71c}$$

また，レプトン化崩壊の頻度はすべて，生成するレプトン対(つい)の種類 $l = e, \mu, \tau$ にはよらず，次の値に整合している．

$$\Gamma(Z^0 \to l^+ l^-) = 0.084 \pm 0.001\,\text{GeV} \tag{19.71d}$$

これはレプトンの相互作用の普遍性を確実に支持する結果であり，また，式(19.13b)，(19.13c)，(19.39) を式(19.66) に代入して得られる最低次の理論予想，

$$\Gamma(Z^0 \to l^+ l^-) = 0.0834\,\text{GeV}$$

にも充分よく一致している．

Z^0ボゾンのすべての崩壊の中で，強粒子(ハドロン)への崩壊と荷電レプトン対(つい)への崩壊による部分は 80％を少し超える程度である．これは観測される全崩壊幅(19.71b) と，部分崩壊幅(19.71c,d) を比較することによって分かる．残りの崩壊は，

$$Z^0 \;\to\; \nu_l + \bar{\nu}_l$$

という反応に帰せられるべきであり，電弱相互作用の低次過程において，これ以外に許容される崩壊はない．この Feynman ダイヤグラムを図19.13 に示す．このように高次の崩壊過程を無視するならば，次式が成立する．

$$\Gamma_\text{t} = \Gamma(Z^0 \to \text{hadrons}) + 3\Gamma(Z^0 \to l^+ l^-) + N_\nu \Gamma(Z^0 \to \nu_l \bar{\nu}_l)$$

ここではニュートリノの種類 $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \ldots)$ を $N_\nu \geq 3$ の任意の数に設定できるようにしたが，その理由にはこれから簡単に言及する．全ニュートリノの寄与は，

$$\begin{aligned} N_\nu \Gamma(Z^0 \to \nu_l \bar{\nu}_l) &= \Gamma_\text{t} - \Gamma(Z^0 \to \text{hadrons}) - 3\Gamma(Z^0 \to l^+ l^-) \\ &= 0.499 \pm 0.004\,\text{GeV} \end{aligned} \tag{19.72a}$$

[14] この解析においても，軟光子放射に関わる輻射補正を考慮する必要がある．

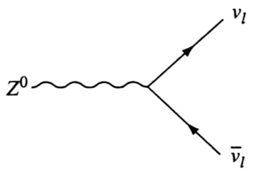


図19.13　崩壊過程 $Z^0 \to \nu_l \bar{\nu}_l$.

となる．上式の数値評価には実験値(19.71b,c,d)を用いた．ニュートリノへの崩壊頻度を直接観測することはできないが，図19.13のダイヤグラムの計算は可能で，その結果は(問題19.1参照)，

$$\Gamma(Z^0 \to \nu_l \bar{\nu}_l) = 0.166\,\mathrm{GeV} \tag{19.72b}$$

となる．これを式(19.72a)と整合させるには，ニュートリノの種類の数が $N_\nu = 3$ でなければならない．

これは重要な結果である．フェルミオンには3つの“世代”(generation)，すなわち (e^-, ν_e)，(μ^-, ν_μ)，(τ^-, ν_τ) の存在が知られており，電弱標準理論において同じ性質を持つ別の世代を加えることは，理論形式上は容易である．第4世代以降の世代が存在するかどうかという問題は，それが存在するとしてもニュートリノ自体は元々検出が難しく，荷電レプトンも既知の世代の荷電レプトンよりも非常に重いとすると発見が困難なので，長い間，憶測の対象でしかなかった．そのような荷電レプトンは，おそらく重すぎて Z^0 ボゾンの崩壊には寄与せず検出にかからないであろう．しかしながら，仮に電弱標準理論の下で ν_e, ν_μ, ν_τ の他にもニュートリノが存在し，その質量が m_Z よりも充分に軽いならば，Z^0 ボゾンは式(19.72b)で与えられる頻度で，そのニュートリノへも崩壊するはずである．このように電弱標準理論の枠組みから見ると，ニュートリノの質量が非常に重いという可能性を考えない限りにおいて，実験結果(19.72a)は，レプトンの世代数を既知の3種類に制約していると言える．

ここまでの反応 $e^+e^- \to X$ の考察は，最低次のレプトン-ボゾン相互作用(19.3d)および(19.3e)だけに依存し，付録BのFeynmanグラフ(B.13)-(B.18)で表されるようなものに限られていた．しかしボゾンの自己結合項(19.3a)すなわちグラフ(B.1)-(B.6)こそが，非Abelゲージ理論において最も注目すべき特徴的な性質を表している．電子-陽電子消滅過程において，3ボゾン自己結合項(式(19.3a)の第1～4行，グラフ(B.1)，(B.2))を調べることも可能である．

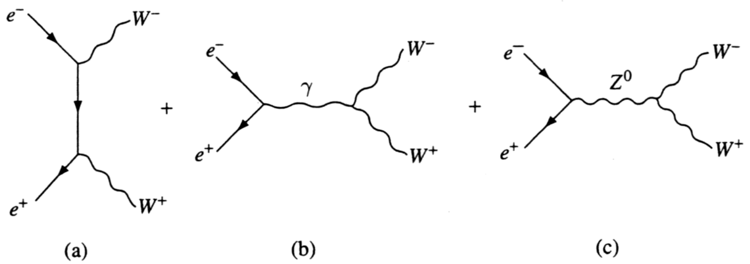


図19.14　反応 $e^+ + e^- \to W^+ + W^-$.

これを行うための最も直接的な方法は，次の反応の考察である．

$$e^+ + e^- \;\to\; W^+ + W^- \tag{19.73}$$

最低次において，この過程への主要な寄与は，図19.14 の Feynmanダイヤグラムから生じる．(図19.14(b)において光子をHiggsボゾンに置き換えたダイヤグラムも寄与を持つ．しかしHiggs-レプトン結合は極めて弱いので，この寄与を無視してよい．19.5節参照．) 反応(19.73)に対して電弱理論から予想される断面積が計算された[15]．閾値付近の断面積は図19.14(a)のダイヤグラムからの寄与が支配的になる．しかし更に高いエネルギーになると，図19.14(a)-(c)の３つのグラフの振幅が同等に重要となり，断面積はこれらの振幅の間の大きな干渉に対して極端に敏感になる．観測された断面積は理論予測と良好な一致を見せ，電弱標準理論に基づく γW^+W^- 結節点（ヴァーテックス）と $Z^0W^+W^-$ 結節点（ヴァーテックス）の詳細な形の妥当性が確認された．

19.5　Higgsボゾン

電弱理論は，広範囲にわたる高精度の実験データの説明に著しい成功を収めてきた．しかし，最も重要な予言——Higgsボゾンの存在——は未だ確認されていない．Higgsボゾンの質量は，既に見たように，理論自体からは予言されない．しかしその質量を与えれば，その相互作用の特性は完全に特定される．これらを Feynmanグラフと結節点（ヴァーテックス）因子によって(B.9)-(B.12)と(B.17)にまとめてある．

Higgsボゾンが光子と直接結合することはない．Higgsボゾンのレプトンへの結合

[15] O. P. Sushkov et al., *Sov. J. Nucl. Phys.* **20** (1975) 537 ; W. Alles et al., *Nucl. Phys.* **B119** (1977) 125.

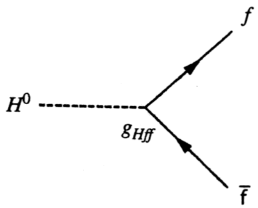


図19.15 Higgs-フェルミオン相互作用の基本結節点．$f = l, \nu_l, q$ である．

は結節点(ヴァーテックス)因子 $-\mathrm{i}m/v$ によって決まる．m は関係するレプトンの質量である．Higgsボゾンのクォーク $q = d, u, s, \ldots$ への結合も同じ形を持ち，基本結節点(ヴァーテックス)は図19.15のように表される．結節点(ヴァーテックス)因子は，

$$\frac{-\mathrm{i}}{v} m_f \quad (f = l, \nu_l, q) \tag{19.74}$$

と表され，これは質量 m_f のレプトンおよびクォークに一般に適用される．式(19.4)と式(19.6)を用いると，この結節点(ヴァーテックス)因子は次のように書かれる．

$$\frac{-\mathrm{i}}{v} m_f = \frac{-\mathrm{i}e}{2\sin\theta_\mathrm{W}} \frac{m_f}{m_W} \tag{19.75}$$

すなわちHiggs-フェルミオン結合はQED結合に対して m_f/m_W のオーダーであり，Higgsボゾンと軽いフェルミオン $m_f \ll m_W$ の結合は強く抑制されている．

19.5.1 Higgsボゾンの崩壊

Higgsボゾンが崩壊する性質の，その想定質量との関係を図19.16および図19.17に示す．ここでは主要な特徴だけを考察する．

$m_H < 2m_W$ ならば，最低次の電弱相互作用によって起こり得る崩壊は，フェルミオン対(つい)への崩壊だけである．

$$H^0 \;\to\; f + \bar{f} \qquad f = l, \nu_e, q \tag{19.76}$$

これらの反応は図19.15の機構によって起こる．計算は直接的に行えるので，読者の練習問題とするが，予言される崩壊幅は次のようになる．

$$\Gamma(H \to f\bar{f}\,) = \frac{N_f}{\pi 4\sqrt{2}} G m_H m_f^2 \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2} \tag{19.77}$$

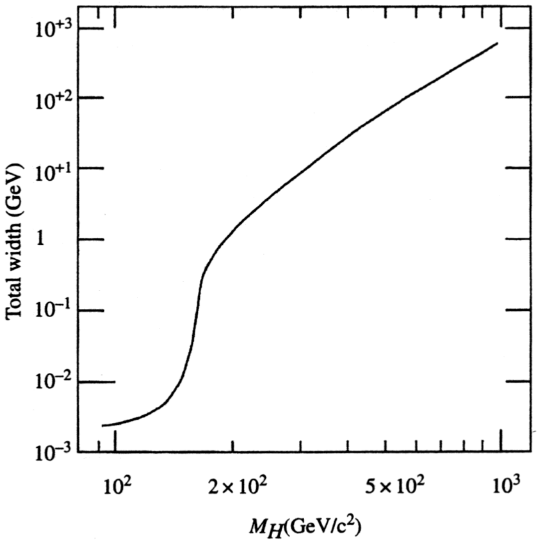


図19.16 Higgsボゾンの質量と崩壊幅の関係. Springer Science & Business Media, Kunst et al., Zeitschrift f. Physik C74, 1997, 479より許可を得て転載.

ここでレプトンに関しては $N_f = 1$ であるが，クォークに関しては $N_f = 3$ となる．クォークの香り $d, u, s, \ldots$ それぞれに対して3つの色状態が存在するためである．崩壊頻度(19.77)はフェルミオンの質量の自乗に比例するので，主要な崩壊モードは，

$$H \rightarrow b + \bar{b}, \qquad m_b \approx 4.5\,\mathrm{GeV} \tag{19.78}$$

である．bクォークは実験室では強粒子(ハドロン)の噴射(ジェット)の形で観測される．他の小さな寄与を無視すると，全崩壊幅に対する近似として，次式を得る．

$$\Gamma_t \approx \frac{3Gm_H m_b^2}{4\sqrt{2}\pi} \approx 10^{-5} m_H \tag{19.79}$$

ここでは m_f^2/m_H^2 を無視した．言い換えるとHiggsボゾンの崩壊幅として予言される値は，この質量領域の想定では極めて小さくなり，$W^\pm$ ボゾンや Z^0 ボゾンよりも寿命がはるかに長くなる．しかしHiggs質量が W^+W^- 閾値を超えると，図19.18に示すような崩壊も許容されるようになる．

$$H^0 \rightarrow W^+ + W^- \quad (m_H > 2m_W) \tag{19.80a}$$

$$H^0 \rightarrow Z^0 + Z^0 \quad (m_H > 2m_{Z^0}) \tag{19.80b}$$

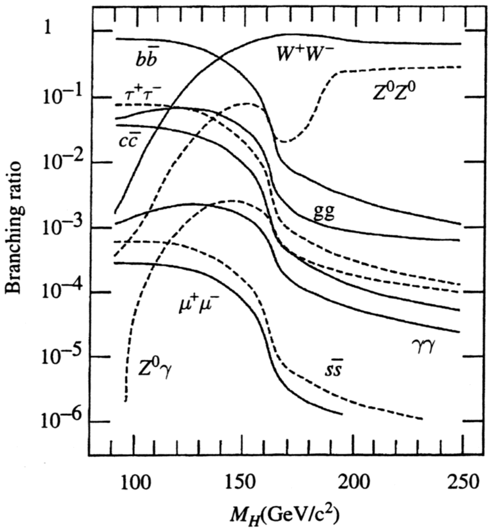


図19.17 Higgsボゾンの質量と分岐比の関係. (Z. Kunst, S. Moretti and W. J. Stirling, Zeit. Phys. **C74** (1997) 479.)

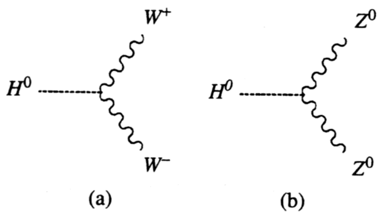


図19.18 Higgsボゾンの (a) W^+W^- への崩壊と (b) Z^0Z^0 対への崩壊.

その上, Higgsボゾンは重い粒子と強く結合するので, これらの崩壊モードが式(19.76)の崩壊において支配的になる.

このことにより, Higgs質量が W^+W^- 閾値エネルギーを超えると, 全崩壊幅に占めるこれらの崩壊の分岐比が急速に増加することを, 図19.17において見て取れる.

ここまでは, 電弱相互作用による最低次の崩壊過程だけを見た. 2次の崩壊モードとして重要な過程が2種類ある.

$$H^0 \ \to \ W^{\pm} + f + \bar{f}', \qquad H^0 \ \to \ Z^0 + f + \bar{f} \tag{19.81}$$

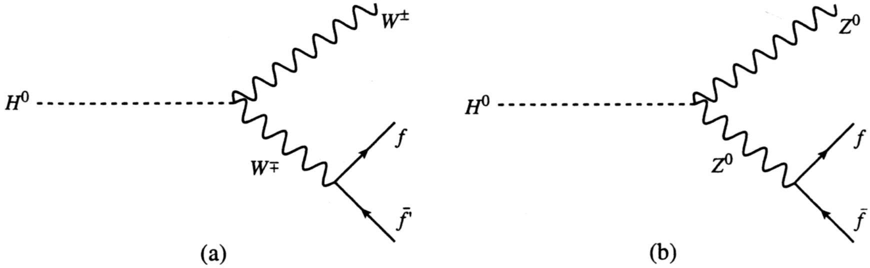


図19.19 Higgsボゾンの2次の崩壊モード. (a) $W^{\pm}f\bar{f}'$ への崩壊. (b) $Z^0 f\bar{f}$ への崩壊. f と f' は保存則から許容される任意のクォークやレプトンの組である.

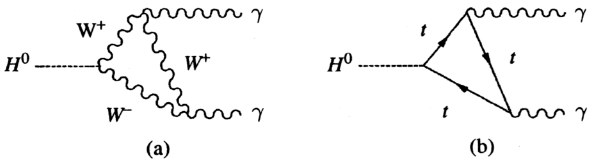


図19.20 崩壊 $H^0 \to \gamma + \gamma$ の主要な機構.

f と f' は適切に保存則を満足するようなフェルミオンの任意の組を表す. これらの崩壊は, 実ベクトルボゾンと, 仮想的な仲介ベクトルボゾンを含むような図19.19の機構によって起こる. この理由から, これらの過程もそれぞれ W^+W^- 崩壊, Z^0Z^0 崩壊と見なして区分されることが多い. 図19.17において W^+W^- 閾値や Z^0Z^0 閾値より低いエネルギーでも崩壊幅がゼロでないのは, これらの2次過程を含めているためである.

さらに高次において, 図19.17に示してあるように, 多くの頻度の低い崩壊モードが予言される. たとえば次の崩壊モード,

$$H^0 \;\to\; \gamma + \gamma \tag{19.82}$$

は, 図19.20の機構によって起こるが, この分岐比は 10^{-3} のオーダーである. それにもかかわらず, もしHiggsボゾンの質量が 110 GeV から 140 GeV の範囲にあるならば, この過程はHiggsボゾンの検出のために重要となる可能性がある. これについて次に見てみる.

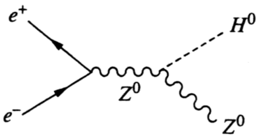


図19.21　e^+e^- 消滅によって Higgs ボゾンを生成する主要な機構.

19.5.2　Higgs ボゾンの探索

実験室においてビームや標的として用意できる粒子は光子，電子，ミュー粒子，および陽子に代表される軽いクォークから成る強粒子(ハドロン)である．Higgs ボゾンは光子に対して直接の結合はせず，電子やミュー粒子や軽いクォークへの結合も極めて弱い．したがって，これらの軽い粒子を最初に用いる反応から Higgs ボゾンを生成することは可能であるとしても，通常は生成頻度が極めて低いはずである．たとえば過程 $e^+e^- \to f\bar{f}$ への図19.7(c) (p.518) からの寄与は，e^+e^- 衝突の重心系エネルギーが $\sqrt{s} = m_H$ の H 共鳴が最大になる条件においてさえ極短に少ない．このような方法で Higgs ボゾンが発見されていないという事実は，Higgs ボゾンと軽いフェルミオン $(m_f \ll m_W)$ との相互作用の弱さに理由があり，必ずしも Higgs ボゾンの質量の重さのためではない．

この問題を克服するには，重くて Higgs ボゾンと強く結合するような $W^{\pm}$ ボゾン，Z^0 ボゾン，t クォークなどを生成することが肝要である．現在までの最良の結果は CERN の LEP II 加速器によるものである．この加速器によるビームエネルギーは，2002年11月に稼働を終える時点において 208 GeV に到達していた．このエネルギーは，もし Higgs ボゾンの質量が 120 GeV 程度以下であれば，

$$e^+ + e^- \;\to\; H^0 + Z^0 \tag{19.83}$$

という反応によって Higgs ボゾンを生成できるものである．この反応の主要な機構は図19.21の過程と想定される．このように Higgs ボゾンが $b\bar{b}$ 対(つい)へと崩壊すれば，それが強粒子(ハドロン)噴射(ジェット)の形で観測されるという予想に基づいて Higgs ボゾンの探索が試みられたが，そのような事象が発見されていない．この事実は，Higgs ボゾンが存在するという仮定の下で，その質量の下限に関する制約，

$$m_H > 113.5\ \mathrm{GeV} \tag{19.84}$$

を含意している．

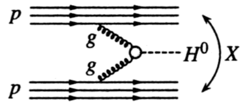


図19.22 反応 $p + \bar{p} \to H^0 + X$ において支配的な“グルーオン融合”の機構.

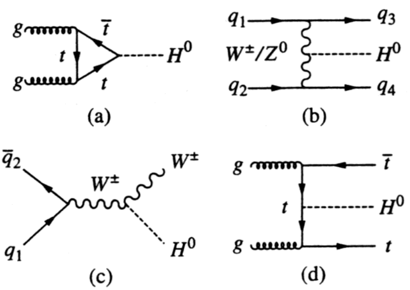


図19.23 LHC において想定される Higgsボゾン生成の機構.

Higgsボゾンの探索はシカゴ近郊の FNAL に建設された加速器 Tevatron でも行われている．これは陽子-反陽子衝突型の加速器で，ビームエネルギーは最高 1 TeV である．Tevatron では生成反応 $p + \bar{p} \to V + H + X$ が集中的な探求の対象となった．X は適切な保存則の要請を満たす任意の強粒子(ハドロン)状態である．ベクトルボゾン $V \equiv W^\pm, Z^0$ は荷電レプトンやニュートリノへと崩壊する．現在これらの実験感度に制約があるが，近々に重要な結果を出す可能性もある．Higgsボゾンの探索は CERN の LHC でも始まりつつある．LHC は陽子-陽子衝突型加速器で，ビームエネルギーは 7 TeV に達する．LHC において主要な関心の対象となる反応は，

$$p + \bar{p} \ \to \ H^0 + X \tag{19.85}$$

である．X は適切な保存則の要請を満たす任意の強粒子(ハドロン)状態を表す．LHC において，この反応を起こす主要な機構として想定されるのは，Higgs質量における“グルーオン融合(フュージョン)”である．この過程を図19.22 に示す．この中にある ggH^0 結節(ヴァーテックス)部分は，t クォークを含むループに支配される．これは図19.23(a) に示すように，H^0 が大変に重い $t\bar{t}$ 状態と強く結合するからである．他の生成過程を図19.23(b),(c),(d) に示してある．これらの過程も Higgsボゾンを同定するための異なる実験的証拠となり得るので関心が持たれている．図19.23(a)-(d) では，図を見やすくするために，観測粒子を

示していない．

式(19.17)に示したように，Higgsボゾンの質量として可能性の高い範囲は $113.5 < m_H < \sim 160$ GeV である．図19.17 (p.530)を見ると，この質量範囲のほとんどにおいて，主要な関心の対象となるのは $H^0 \to b\bar{b}$ チャネルのように思われる．生成するクォークはLEPの実験と同様に破砕して強粒子(ハドロン)噴射(ジェット)として観測されるはずである．しかし残念ながら，これらの噴射(ジェット)を他の方法で多量に発生する噴射(ジェット)と区別することは極めて困難である．このため他の崩壊モードの方が，分岐比は低いとしても，より有望となる見込みである．たとえば先ほど言及した $H^0 \to \gamma\gamma$ の分岐比は 10^{-3} のオーダーに過ぎないが，検出器に2つの分離した電磁的クラスターの信号を生じる可能性があり，それは $H^0 \to b\bar{b}$ チャネルの場合よりもむしろ背景信号の水準が相対的に低く，$\gamma\gamma$ 生成自体を検出しやすいものと期待される．

他方において，Higgsボゾンが更に重いようであれば，それは主に W^+W^- チャネルへ崩壊すると考えられる．いずれにせよ式(19.17)の全質量範囲と，それを充分に超える領域までが，LHCにおいて時間をかけて徹底的に探索されることになるであろう．

練習問題

19.1 $Z^0 \to l^+l^-$ に関して，m_l^2/m_Z^2 を無視できると仮定して，崩壊頻度(19.66)を導出せよ．$Z^0 \to \nu_l\bar{\nu}_l$ の崩壊頻度が，

$$\Gamma(Z^0 \to \nu_l\bar{\nu}_l) = \frac{1}{\pi 12\sqrt{2}} G m_Z^3$$

と与えられ，$m_Z = 91$ GeV と置くと 0.17 GeV になることを示せ．

19.2 Higgsボゾンはクォーク-反クォーク対にも，レプトン-反レプトン対にも崩壊する．摂動の最低次において，これらの崩壊 $H \to f\bar{f}$ $(f = l, \nu_l, q)$ は図19.15 (p.528)のFeynmanダイヤグラムによって記述される．崩壊幅を導け．

$$\Gamma(H \to f\bar{f}) = \frac{1}{\pi 4\sqrt{2}} G m_H m_f^2 \left(1 - 4\frac{m_f^2}{m_H^2}\right)^{3/2}$$

19.3 $\nu_\mu e^-$ 散乱と $\bar{\nu}_\mu e^-$ 散乱の全断面積(19.44a)と(19.44b)を導出せよ．

19.4 Feynman振幅の式(19.58), (19.55)から出発して，$e^+e^- \to l^+l^-$ $(l \neq e)$ の微分断面積を導け．ただし簡単な近似として $\sin^2\theta_\mathrm{W} = 0.25$，すなわち $g_\mathrm{V} = 0$，$g_\mathrm{A} = -\frac{1}{2}$ を採用せよ．結果を式(19.60a)-(19.60c)と比較して検証してみよ．

19.5 ユニタリーゲージにおいて，一般化されたHiggs-ニュートリノ結合項(18.44a)は次式に帰着することを示せ．

$$\sum_j \frac{-1}{\sqrt{2}} \lambda_j \bar{\psi}_j(x) \psi_j(x) [v + \sigma(x)]$$

ここで，

$$\psi_j(x) = \sum_l U_{jl}\psi_{\nu_l}(x)$$

であり，U はエルミート結合行列 G を対角化するユニタリー行列である．

$$\left(UGU^\dagger\right)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$$

式(18.44a) から場 $\psi_j(x)$ に対応する固有状態ニュートリノ ν_j が導かれ，その質量が，

$$m_j = \lambda_j v/\sqrt{2}$$

となることを示せ．また Higgs-ニュートリノ相互作用が，$f = \nu_j$ を固有状態のニュートリノとする図19.15 (p.528) の形の結節点で表され，その結節点因子が，

$$\frac{-\mathrm{i}}{v} m_f \quad (f = \nu_j)$$

と与えられることを示せ．

$G_{ij} = \delta_{ij}$ とすると，固有状態のニュートリノ ν_j はレプトン・ニュートリノ ν_e, ν_μ, ν_τ と同じものとなり，本章の結果が再現される．

19.6 次の崩壊過程の Feynman 振幅を書き下せ．

$$Z^0(p, r) \;\to\; H(p') + e^+(q_1, r_1) + e^-(q_2, r_2)$$

そして簡便な近似として $\sin^2\theta_{\mathrm{W}} = 0.25$ を採用し，電子質量を無視すると，次式が得られることを示せ．

$$\mathcal{M} = \frac{-\mathrm{i}C}{k^2 - m_Z^2}\,\bar{u}(\mathbf{q}_2)\gamma^\alpha\gamma^5 v(\mathbf{q}_1)\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{p})$$

ここで $k = p - p'$ で，

$$C = v\,g^3/(8\cos^3\theta_{\mathrm{W}})$$

である．

電子質量をそのまま無視して，次式を導け．

$$(2m_e)^2 \frac{1}{3}\sum_r \sum_{r_1, r_2} |\mathcal{M}|^2 = \frac{C^2}{(k^2 - m_Z^2)^2}\frac{4}{3}\left[(q_1 q_2) + \frac{2}{m_Z^2}(pq_1)(pq_2)\right]$$

上式においてレプトン運動量 q_1, q_2 に関する積分を行うことにより，終状態において Higgsボソンが $\mathbf{p}'$ の近傍の範囲 $\mathrm{d}^3\mathbf{p}'$ に入る微分崩壊頻度 $\mathrm{d}\Gamma$ を求めることができる．レプトン運動量の積分方法は，ミュー粒子崩壊に関して行った方法 (式(16.53)-(16.63)) とよく似たものである．これを利用して次式を導け．

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{C^2}{36(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'}{EE'}\frac{1}{(k^2 - m_Z^2)^2}\left[2k^2 + \frac{1}{m_Z^2}(pk)^2\right]$$

付録 B　摂動論の公式とFeynman規則

この付録では共変な摂動論の主要な結果，すなわち断面積や寿命やFeynman振幅，およびFeynmanダイヤグラムからその振幅を書き下すためのFeynman規則をまとめる．この総括は，これらの方法を既に理解していて，その応用を試みようとする読者のためのものである．ここでの説明は最低限に抑えるが，読者の便宜を考えて，式の番号から参照先が分かるようにしておく．

この付録では，ニュートリノをゼロでない質量を持つDirac粒子と仮定したが，混合の効果は無視している[1]．遷移頻度などの観測可能量に関して $m_{\nu_l} \to 0$ の極限を得ることは容易である．

(i) Feynman振幅

遷移 $|i\rangle \to |f\rangle$ に関するFeynman振幅 $\mathcal{M}$ は，それに対応するS行列の要素 S_{fi} との関係によって定義される．

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^{(4)}\Big(\sum p'_f - \sum p_i\Big) \times \prod_i \left(\frac{1}{2VE_i}\right)^{1/2} \prod_f \left(\frac{1}{2VE'_f}\right)^{1/2} \prod_l (2m_l)^{1/2} \mathcal{M} \tag{8.1}$$

$p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$ は始状態における各粒子の4元運動量，$p'_f = (E'_f, \mathbf{p}'_f)$ は終状態における各粒子の4元運動量である．添字 l は，ここではすべての外線レプトン(荷電レプトンおよび中性レプトン)に付けた番号で，m_l は l 番目の外線レプトンの質量を表す．

(ii) 断面積

2つの粒子 $(i = 1, 2)$ を同一直線上で相対速度 v_{rel} で衝突させた結果，終状態において N 個の粒子 $(f = 1, 2, \ldots, N)$ が得られた場合，微分断面積は次式となる．

$$\mathrm{d}\sigma = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\Big(\sum p'_f - \sum p_i\Big) \frac{1}{4E_1 E_2 v_{\mathrm{rel}}} \left(\prod_l (2m_l)\right) \left(\prod_f \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_f}{(2\pi)^3 2E'_f}\right) |\mathcal{M}|^2 \tag{8.8}$$

[1] 混合とMajoranaニュートリノの話題は16.7節と18.3節において論じてあり，参考文献もそこに挙げてある．

式(8.8)において始状態と終状態におけるすべての粒子はスピン／偏極状態が確定している．式(8.8)は任意のLorentz座標系において成立する．また，

$$v_{\mathrm{rel}} = \frac{\left[(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2\right]^{1/2}}{E_1E_2} \tag{8.9}$$

である．たとえば次のようになる．

$$v_{\mathrm{rel}} = |\mathbf{p}_1|\frac{E_1+E_2}{E_1E_2} \quad (\text{CoM}:\text{重心系}) \tag{8.10a}$$

$$v_{\mathrm{rel}} = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} \quad (\text{Lab}:\text{実験室系}) \tag{8.10b}$$

(iii) 粒子の寿命

4元運動量 $p = (E, \mathbf{p})$ を持つ粒子 P が，N 個の粒子へ崩壊し，それらの4元運動量が $p'_f = (E'_f, \mathbf{p}'_f)$ であるとする．この微分崩壊頻度 $\mathrm{d}\Gamma$ は次式で与えられる．

$$\mathrm{d}\Gamma = (2\pi)^4\delta^{(4)}\Big(\sum p'_f - p\Big)\frac{1}{2E}\Big(\prod_l(2m_l)\Big)\Big(\prod_f\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'_f}{(2\pi)^32E'_f}\Big)|\mathcal{M}|^2 \tag{16.36}$$

式(16.36)では，始状態と終状態のすべての粒子のスピン／偏極が確定しているものとしている．粒子 P の寿命 τ は，

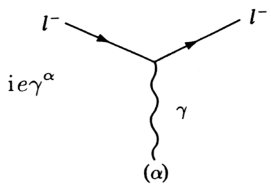
$$\tau = B/\Gamma \tag{16.38}$$

と表される．Γ は考察の対象としている崩壊モードの全崩壊頻度，B はそのモードへの分岐比(16.37)である．

(iv) QEDのFeynman規則

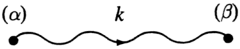
QEDの過程に関するグラフから7.3節と8.7節のFeynman規則に従ってFeynman振幅を得ることができる．荷電レプトン $l^{\mp}$ に対するFeynman規則を，中性レプトン ν_l と $\bar{\nu}_l$ にも適用できる．冗長な記述の繰り返しを避けるために，荷電レプトンと中性レプトンを初めから両方とも対象と見なして，包括的に規則を書き下すことにする．

1. 各々のQED結節点(ヴァーテックス)に，次の因子を書く．



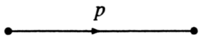
2. 光子の内線それぞれに対し，その内線に付記してある運動量 $\boldsymbol{k}$ に応じて，次の因子を書く.

$$\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\alpha\beta}(k) = \mathrm{i}\frac{-g_{\alpha\beta}}{k^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{7.47}$$



3. レプトンの内線それぞれに対し，その内線に付記してある運動量 p に応じて，次の因子を書く.

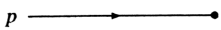
$$\mathrm{i}S_{\mathrm{F}}(p) = \mathrm{i}\frac{1}{\not p - m + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{7.48}$$



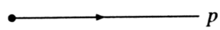
m は対象とするレプトンの質量 m_l や m_{ν_l} を表す $(l = e, \mu, \tau)$.

4. 各外線に対して，以下に示す因子を書く.

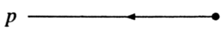
(a) 始状態のレプトン l^-, ν_l : $u_r(\mathbf{p})$ (7.49a)



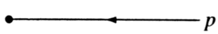
(b) 終状態のレプトン l^-, ν_l : $\bar{u}_r(\mathbf{p})$ (7.49b)



(c) 始状態のレプトン l^+, $\bar{\nu}_l$: $\bar{v}_r(\mathbf{p})$ (7.49c)



(d) 終状態のレプトン l^+, $\bar{\nu}_l$: $v_r(\mathbf{p})$ (7.49d)



(e) 始状態の光子 : $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ (7.49e)



(f) 終状態の光子[2] : $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ (7.49f)



式(7.49) において $\mathbf{p}$ と $\mathbf{k}$ は外線粒子の 3 次元運動量を表し，$r\ (=1,2)$ はスピン状態もしくは偏極状態を表す.

5. 各フェルミオン線と，それらを接続する各結節点（ヴァーテックス）に付随するスピノル因子 (4 成分スピノル, S_{F} 関数, γ 行列) は，式の中では相互に接続している一連のフェルミオン線の矢印を辿る順序と対応させて，右から左へ並べる.

6. 閉じたフェルミオン線それぞれに関して対角和（トレース）を取り，因子 (-1) を掛ける.

7. 各結節点（ヴァーテックス）に接続している線の 4 元運動量は，エネルギー-運動量保存を満たす. エネルギー-運動量保存条件によって固定されない 4 元運動量 q それぞれについて，積分 $(2\pi)^{-4}\int \mathrm{d}^4 q$ を実行する. このような内部運動量変数 q に関する積分は，閉じたループそれぞれにおいて生じる.

8. 式に位相因子 δ_{P} を掛ける. これは外線フェルミオン因子 (フェルミオン演算子) の順序を外線指標 (引数) の順序が適正になるように並べ直すときに，必要となるフェルミオン同士の置換回数が偶数回 (奇数回) の場合に $+1\ (-1)$ とする.

---

[2] 線形偏極状態を基本状態として選べば $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ は実数である. 一般に偏極ベクトルは複素数であり，その場合は終状態の光子に充てる因子を $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$ の代わりに $\varepsilon^*_{r\alpha}(\mathbf{k})$ に置き換えなければならない.

“外部の静的な電磁場” $A_{e\alpha}(\mathbf{x})$ との相互作用を扱う際には，次の修正を加える．

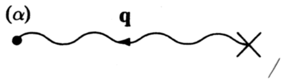
(a) $\mathcal{M}$ と S_{fi} を関係づける式(8.1)において，次の置き換えを行う．

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum p'_f - \sum p_i\right) \;\to\; (2\pi)\delta\left(\sum E'_f - \sum E_i\right) \tag{8.89}$$

(b) 次の Feynman 規則を追加する．

9. 荷電粒子と外部の静的電磁場 $A_{e\alpha}(\mathbf{x})$ との相互作用それぞれに対して，次の因子を書く．

$$A_{e\alpha}(\mathbf{q}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} A_{e\alpha}(\mathbf{x}) \tag{8.90}$$



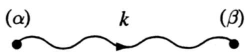
$\mathbf{q}$ は場の源 (×) から粒子へ移行する運動量である．

(v) 電弱標準理論のために追加される Feynman 規則

以下の規則は，ゼロにならない最低次の摂動の計算だけに適用される[3]．

11. 質量を持つベクトルボゾンの内線それぞれに対し，付記してある運動量 k に応じて次の因子を書く．

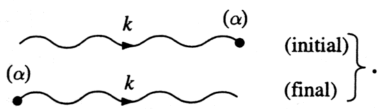
$$\mathrm{i}D_{\mathrm{F}\alpha\beta}(k,m) = \frac{\mathrm{i}\left(-g_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta/m^2\right)}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{16.30}$$



$W^\pm$ ボゾンの場合は $m = m_W$，Z^0 ボゾンの場合は $m = m_Z$ と置く．

12. 始状態および終状態における $W^\pm$ ボゾン，Z^0 ボゾンを表す各外線に，次の因子を書く．

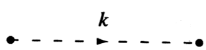
$$\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k}) \tag{16.32}$$



ただし，複素偏極ベクトルを採用する場合には，終状態のベクトルボゾンに $\varepsilon^*_{r\alpha}(\mathbf{k})$ を充てる．

13. Higgs ボゾンの内線それぞれに対して，付記されている運動量 k に応じて，次の因子を書く．

$$\mathrm{i}\Delta_{\mathrm{F}}(k, m_H) = \frac{\mathrm{i}}{k^2 - m_H^2 + \mathrm{i}\varepsilon} \tag{19.21}$$

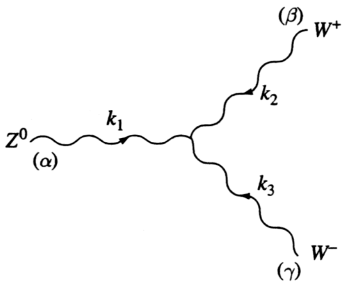


m_H は Higgs スカラーボゾンの質量である．

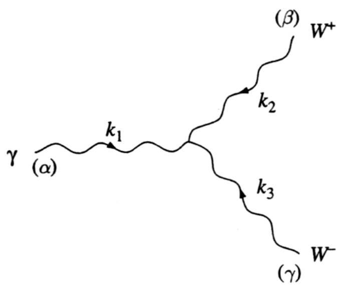
---

[3] 16.4 節における Feynman 規則 10 は，IVB 理論の結節点因子を扱うものである．この規則はここでは電弱理論における結節点因子を扱う規則 14 に含まれる．

14. 電弱標準理論では，式(19.3a)-(19.3e) の各項から 18 種類の基本結節点(ヴァーテックス)が生じる．これらを表19.1 (p.507) にまとめてある．これらの基本結節点の Feynman ダイヤグラムと結節点(ヴァーテックス)因子を以下に与える．(B.1)-(B.18) は，表19.1 の項番号と同じ順序にしてある[4)].



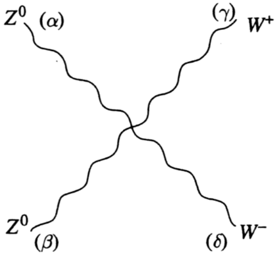
$$i g \cos\theta_{\mathrm{W}} \left[g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^{\gamma} + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^{\alpha} + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^{\beta} \right] \tag{B.1}$$



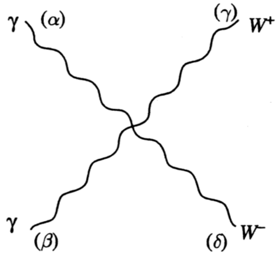
$$i e \left[g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^{\gamma} + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^{\alpha} + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^{\beta} \right] \tag{B.2}$$

---

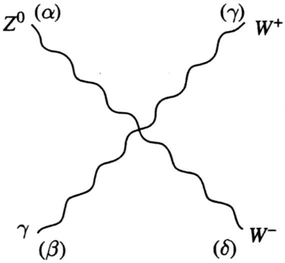
4) Feynman 規則 14 には，電弱理論のすべての相互作用を挙げてある．先ほどの QED の Feynman 規則 (iv) では，QED の範囲内で自己完結した規則をつくるために，QED の結節点因子 (B.13) だけは既に規則 1 として提示してある．



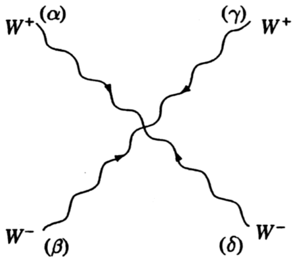
$$ig^2\cos^2\theta_W\left[g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}+g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}-2g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\right] \tag{B.3}$$



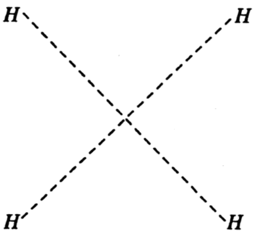
$$ie^2\left[g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}+g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}-2g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\right] \tag{B.4}$$



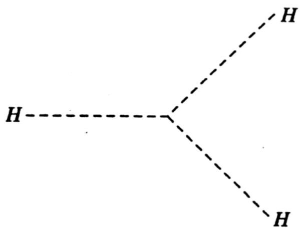
$$ieg\cos\theta_W\left[g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}+g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}-2g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\right] \tag{B.5}$$



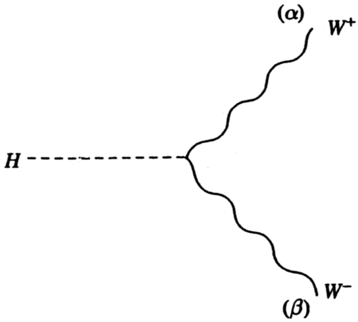
$$ig^2\left[2g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}\right] \tag{B.6}$$



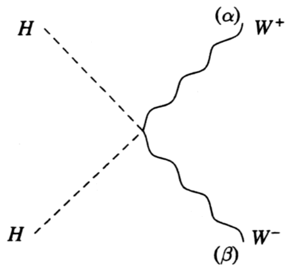
$$-6\mathrm{i}\lambda \tag{B.7}$$



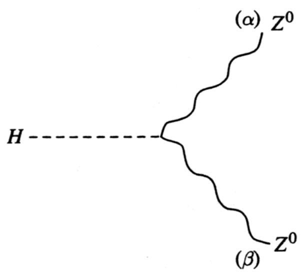
$$-6\mathrm{i}\lambda v \tag{B.8}$$



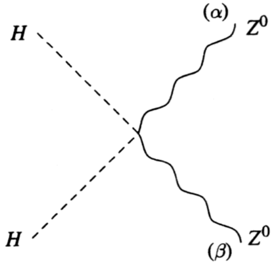
$$\frac{1}{2}\mathrm{i}vg^2 g^{\alpha\beta} \tag{B.9}$$



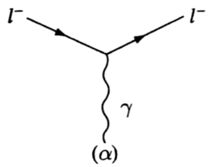
$$\frac{1}{2}\mathrm{i}g^2 g^{\alpha\beta} \tag{B.10}$$



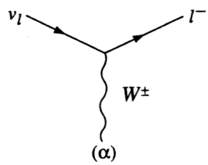
$$\frac{\mathrm{i}vg^2}{2\cos^2\theta_{\mathrm{W}}} g^{\alpha\beta} \tag{B.11}$$



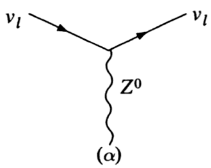
$$\frac{\mathrm{i}g^2}{2\cos^2\theta_{\mathrm{W}}}\, g^{\alpha\beta} \tag{B.12}$$



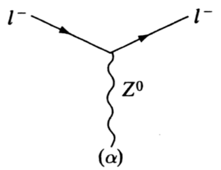
$$\mathrm{i}e\gamma^{\alpha} \tag{B.13}$$



$$\frac{-\mathrm{i}g}{2\sqrt{2}}\,\gamma^{\alpha}(1-\gamma_5) \tag{B.14}$$



$$\frac{-\mathrm{i}g}{4\cos\theta_{\mathrm{W}}}\,\gamma^{\alpha}(1-\gamma_5) \tag{B.15}$$

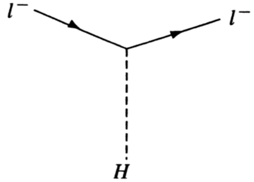


$$\frac{-ig\gamma^\alpha}{4\cos\theta_W}(1-4\sin^2\theta_W-\gamma_5) \tag{B.16}$$

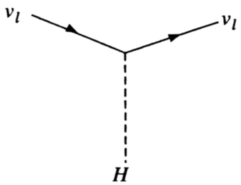
$$= \frac{-ig\gamma^\alpha}{2\cos\theta_W}(g_V-g_A\gamma_5) \tag{B.16a}$$

ここで g_V と g_A は次のように定義されている.

$$g_V = 2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}, \quad g_A = -\frac{1}{2} \tag{B.16b}$$



$$\frac{-i}{v}m_l \tag{B.17}$$



$$\frac{-i}{v}m_{\nu_l} \tag{B.18}$$

結合定数は，次の関係を満たす.

$$g \sin\theta_{\rm W} = g' \cos\theta_{\rm W} = e \qquad (19.6)$$

そして，各粒子の質量は，最低次で次のように与えられる.

$$m_W = \frac{1}{2} v g, \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos\theta_{\rm W}}, \quad m_H = \sqrt{-2\mu^2} \qquad (19.4)$$

$$m_l = \frac{v g_l}{\sqrt{2}}, \quad m_{\nu_l} = \frac{v g_{\nu_l}}{\sqrt{2}} \qquad (19.8)$$

ここで，

$$v = \left(\frac{-\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2} = \left(G\sqrt{2}\right)^{-1/2} \quad (> 0) \qquad (19.5),(19.14)$$

であり，したがって次の関係がある.

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8 m_W^2}$$

(vi) QCD の Feynman 規則

QCD の Feynman 規則は 14.4 節にまとめてある (p.383〜). これも QED の規則 (iv) や電弱統一理論の規則 (v) とよく似た方法で与えられる.

訳者あとがき

本書は F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory*, 2nd edition, Wiley & Sons, Ltd., 2010 の全訳である．原書の初版は 1984 年に出版されており，場の量子論の標準的な教科書のひとつと見なされてきた．初版では量子電磁力学と弱い相互作用 (電弱理論) が扱われていたが，今回訳出の対象とした 2010 年の第 2 版では，新たに 5 つの章が挿入され (第 11～15 章)，この部分においてゲージ理論と場の理論の一般論 (Green 関数・生成汎関数) および径路積分の解説を踏まえて強い相互作用の理論 (量子色力学) が論じられている．その結果，この第 2 版全体として，ゲージ原理と繰り込み可能性の観点から素粒子の標準理論の基礎的な部分をひと通りカバーする構成になっており，標準的な教科書としての価値は，初版よりも高まったと言えると思う．(クォークの弱い相互作用については, 他の文献で補う必要があるけれども．)

場の量子論を扱っている書籍は，もちろん和書でも従来からいろいろある．しかしながら，初学者向けの教科書として見るならば，概して書き込み不足の感が否めない．本書の最大の特徴は，著者たちが筆を惜しまずに平易な教育的解説に徹している点にある．場の量子論の理論体系は，素粒子論の枠組みとして (大局的に言えば現代の自然科学の根源的な拠り所として) 大きな成功を遂げてきた．そして本書で扱われている内容は，その中でも既に理論的に確立されて久しい基礎的な部分のはずなので，初学者や専門外の人々向けの書籍として和書の形でも存在して然るべき内容であると思う．本書の翻訳は，訳者の事情により短期間で，しかも精神的に余裕のない状態で行わざるを得なかったので，訳文には拙い部分も多々あるかも知れない．それでも一般の理工系学生や技術者が，本格的な場の量子論に対して感じる "近づき難い印象" を多少なりとも緩和するために，この訳書が少しでも役立つならば幸いである．

訳書の出版に関して，丸善プラネット株式会社の水越真一氏，戸辺幸美氏に世話になった．御礼を申し上げたい．

2011 年 2 月

茨城県ひたちなか市にて　　　　　　　　　　樺 沢 宇 紀

索 引

<さ行>

<た行>

<な行>

訳者略歴
1990年　大阪大学大学院基礎工学研究科物理系専攻前期課程修了
　　　　㈱日立製作所 中央研究所 研究員
1996年　㈱日立製作所 電子デバイス製造システム推進本部 技師
1999年　㈱日立製作所 計測器グループ 技師
2001年　㈱日立ハイテクノロジーズ 技師

著書
Studies of High-Temperature Superconductors, Vol. 1
（共著，Nova Science，1989）
Studies of High-Temperature Superconductors, Vol. 6
（共著，Nova Science，1990）

訳書
『多体系の量子論』（シュプリンガー，1999）
『現代量子論の基礎』（丸善プラネット，2000）
『メソスコピック物理入門』（吉岡書店，2000）
『量子場の物理』（シュプリンガー，2002）
『ニュートリノは何処へ？』（シュプリンガー，2002）
『低次元半導体の物理』（シュプリンガー，2004）
『素粒子標準模型入門』（シュプリンガー，2005）
『半導体デバイスの基礎（上/中/下）』（シュプリンガー，2008）
『ザイマン現代量子論の基礎—新装版』（丸善プラネット，2008）
『現代量子力学入門—基礎理論から量子情報・解釈問題まで』（丸善プラネット，2009）
『サクライ上級量子力学（Ⅰ/Ⅱ）』（丸善プラネット，2010）
『シュリーファー超伝導の理論』（丸善プラネット，2010）

場の量子論　第2巻　素粒子の相互作用

2011年5月20日　初版発行

訳　者　樺　沢　宇　紀

発行所　丸善プラネット株式会社
〒140-0002 東京都品川区東品川 4-13-14
電 話 03-5781-0721
http://planet.maruzen.co.jp/

発売所　丸善出版株式会社
〒140-0002 東京都品川区東品川 4-13-14
電 話 03-6367-6038
http://pub.maruzen.co.jp/

印刷・製本/富士美術印刷株式会社

ISBN 978-4-86345-082-0 C3042